منطق الخوارزمي في الجبر والمقابلة

الدكتور ياسين خليل
استاذ المنطق وفلسفة العلوم
كلية الاداب — جامعة بغـــــداد

مقدمـــــــــــة :

في الفصل الصيفي للعام الدراسي ١٩٥٧ — ١٩٥٨ حضرت محاضرات الاستاذ الدكتور هانس هيرمس (Hans Hermes) رئيس معهد المنطق الرياضي في جامعة مونستر Munster بالمانيا الغربية كطالب دكتوراه وكان موضوع الدراسة « مدخل الى المنطق الرياضي » وبعد محاضرات عديدة تناول فيها حساب القضايا (Aussagenkalkül) والعناصر المنطقية المشتركة ، انتقل الى تحليل حساب المحمولات (Prudikatenkalkül) اوحساب دالات القضايا Propositional) (Functions (١) فاذا به يطرح مقدمة يتناول فيها الاصول التاريخية لموضوع البحث فيذكر اسم الخوارزمي في المحاضرة ، وهنا التفت اليّ لمعرفته اني عربي يسألني عن طريقة تلفظ اسمه ، وهل الافضل ان يقال الخارزمي اوالخوارزمي ؟ فاجبته في حينه اننا نفضل استعمال الخوارزمي فنقول انه محمد بن موسى الخوارزمي ، ثم اشار بعد ذلك الى جهود العلماء العرب واسهاماتهم الفذة في الرياضيات وسمعت منه لاول مرة في حياتي الدراسية ان بين اسم الخوارزمي والمفهوم الشائع (Algorithmus) في الرياضيات علاقة وطيدة عرفها الانسان منذ مائة عام ، بان اسم « الغورثم » مشتق من اسم العالم العربي الخوارزمي (٧٧٨ — ٨٣٠) (٢)

وبعد عشرين سنة أعود الان لدراسة هذه المسألة التي اهملتها لاناقشها من زاوية جديدة وفي ضوء مبادئ ومفاهيم المنطق الرياضي .

ومن أجل ذلك أقسم موضوع منطق الخوارزمي الى أوجه متعددة تؤلف مع خطة البحث جميع ماتحتويه هذه الدراسة : —

خطـــــــــة البحث	(§ : ١)
المنطق والطريقـــــة	(§ : ٢ ، § : ٣)
الحساب والفن الارتباطـــي	(§ : ٤)
الحساب المنطقي لجبر الخوارزمي	(§ : ٥)
طريقة الرد في الجبر	(§ : ٦)
الجبر والحل الهندسي	(§ : ٧)

١ . ان الغاية التي انشد تحقيقها في هذا البحث تتجلى في الكشف عن اصول المنطق والطريقة التي وضع اسسها عالم الرياضيات العربي محمد بن موسى الخوارزمي وذلك من خلال دراسة تحليلية لكتابه في الجبر والمقابلة واسلوب تفكيره ، وان ابرهن على انه رائد المنطق الرياضي ومبتكر منطق جديد يختلف عن منطق ارسطو .

ولابد لنا قبل ذلك ان نتعرف على شخصية الخوارزمي واعماله العلمية . لم تذكر كتب التراجم والسير العربية القديمة عن حياة الخوارزمي الاالقليل ويقول عنه ابن النديم «أن اسمه محمد بن موسى واصله من خوارزم وكان منقطعا الى خزانة الحكمة للمأمون ، وهو من أصحاب علوم الهيئة ، وكان الناس قبل الرصد وبعده يعولون على زيجه الاول والثاني ، ويعرفان بالسند هند» .

وله من الكتب : كتاب الزيج بنسختين اولى وثانية ، كتاب الرخامة ، كتاب العمل بالاسطرلابات ، كتاب عمل الاسطرلاب ، كتاب التاريخ(٣) .

ولايذكر صاحب الفهرس كتاب الخوارزمي في الجبر والمقابلة وكتابه في الحساب ، بينما نجد القفطي يذكر كتاب الجبر والمقابلة عند استعراضه لمؤلفاته (٤) . ويذكر له كتاب الحساب في ترجمة حياة كنكه الهندى فيقول «ومما وصل الينا من علومهم (يقصد الهنود) حساب العدد الذى بسطه ابو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي وهو أوجز حساب واخصره واقربه تناولا واسهله مأخذا يشهد للهند بذكاء الخاطر وحسن التوليد وبراعة الاختيار والاختراع (٥)» .

ولايذكر ابن ابي اصيبعة في كتابه شيئا عن الخوارزمي ولكنه يذكر محمد بن موسى المنجم فيقول « وهو احد بني موسى بن شاكر الحساب المشهور بالفضل والعلم والتصنيف في العلوم الرياضية وكان محمد هذا من ابر الناس بحنين من اسحق ، وقد نقل له حنين كثيرا من الكتب الطبية»(٦).
ويبدو — الان بوضوح ضرورة التمييز بين شخصيتين هما محمد بن موسى الخوارزمي ومحمد بن موسى بن شاكر المنجم ، وقد تنبه الى ذلك القفطي حين يذكر « محمد بن موسى المنجم الجليس وليس بالخوارزمي كان

هذا رجلا عالما بالنجوم خبيرا بمجالسة الملوك ومحاضرتهم وكان في زمن المأمون وبعده (٧) » .

وفي ترجمة حياة محمد بن ابراهيم الفزارى يذكر القفطي محمد بن موسى الخوارزمي في معرض حديثه عن السند هند : « انه قدم على الخليفة المنصور في سنة ست وخمسين ومائة رجل من الهند قيم بالحساب المعروف بالسند هند في حركات النجوم . . . . فأمر المنصور بترجمة ذلك الكتاب الى العربية وان يؤلف منه كتاباً تتخذه العرب اصلا في حركات الكواكب فتولى ذلك محمد بن ابراهيم الفزارى وعمل منه كتابا يسميه المنجمون السند الهند الكبير وتفسير السند الهند باللغة الهندية الدهر الداهر وكان اهل ذلك الزمان اكثر من يعملون به الى ايام الخليفة المأمون فاختصره له ابو جعفر محمد بن موسى الخوارزمي وعمل منه زيجه المشهور ببلاد الاسلام (٨) » .

وبعد فان خطتي في البحث تختلف عما هو متعارف عليه عند تناول المسائل – التراثية ، وغايتي ان اثبت جدواها عن طريق ماتظهره من نتائج علمية مهمة وان ابرهن بطريقة غير مباشرة على عدم جدوى الطريقة التاريخية في بحث التراث العلمي العربي ، واقصد بالطريقة التاريخية الاسلوب الذي اتبعه معظم المستشرقين في سلخ القيمة العلمية واصالة التراث العلمي والفكرى العربي بمحاولة ارجاعه الى مصادر غير عربية تأثر بها واخذ عنها مع افتراض مسبق ان كل انجاز عربي لايمكن أن يكون اصيلا وذاتيا ، وما على البحث التاريخي إلا أن يثبت اصل هذا الانجاز اوذلك لامم اخرى غير الامة العربية ، وغالبا مانجد تحيزا واضحا لحضارات اخرى مثل الحضارة اليونانية والفارسية والهندية والبابلية القديمة في رد كل انجاز عربي اليها .

ان من اكبر الاخطاء التي رافقت مهمة دراسة التراث العلمي العربي وكشف دوره في تطور العلم ، محاولة بحث الانجازات العلمية من زاوية التحيز المطلق للفكر اليوناني ، فنجد الباحث ينظر في التراث العربي ليجد مايوافق مقولات واصول الفلسفة اليونانية والعلم اليوناني فان وجد اختلافات اوابتكارات غير معروفة عند اليونان نراه اما ان يغفلها اويقلل من

شأنها ، اوينسبها الى بدايات يونانية بسيطة وهو في كل ذلك ينطلق من عقدة تفوق العقلية الاوربية على كل ماعداها . ومن ابرز الامثلة على ذلك مايذكره بيل عن جبر الخوارزمي بقوله : « ان الانجاز باجمعه ماهو الامزيج من النتائج اليونانية والهندية ، وان التقدم الرئيس الذى حققه هو تطبيق اسماء الاعداد الهندية على الحل العددى للمعادلات » (٩) .

ومن الطريف ان تتعدد الاجتهادات في ارجاع الابتكار العربي لتثبت في النهاية عقم الطريقة التاريخية وتفاهة التحيز الاوربي ، فيذكر الدوميلي في حديثه عن جبر الخوارزمي مانصه : « اما الخوارزمي فانه لم يكن شخصيا مبدع هذا الجبر الحديث ولم يكن الا ناطقا بلسان المدرسة البابلونية اوالايرانية القديمة ، التابعة مع ذلك لتيار التجديد والاصلاح » (١٠) .

وتتميز خطتي في البحث باعتمادها على المصادر العربية بالدرجة الاولى وعلى معرفة التطورات الكبيرة التي رافقت تطور المنطق والرياضيات ، وصلة الطريقة الخوارزمية بهما بالدرجة الثانية ، واعتراف بعض العلماء المعاصرين بأهمية هذه الطريقة وجداوها في المنطق الرياضي بالاضافة الى ماكتسبته من اهمية في الرياضيات ، وغايتي من كل ذلك ان اذهب بالبحث الى آفاق جديدة. اذ المفروض في البحث العلمي دراسة المسائل التفصيلية اضافة الى الاطار العام لمعرفة الابتكارات الحقيقية التي توصل الى تثبيتها الخوارزمي ، وذلك في ضوء ماتحقق من انجازات في الطريقة ، وهذا الاسلوب في البحث العلمي ليس جديدا على الفكر العلمي فقد طرحه كثير من العلماء في دراساتهم لمسائل تراثية ، فمن المعروف مثلا أن منطق ارسطو قد درس في الوقت الحاضر من زاوية المنطق الرياضي الحديث اذ امكن بمساعدة مفاهيم المنطق الرياضي واسلوب التدوين الرمزى عرض المنطق القديم من زاوية منطقية حديثة كما في كتاب لوكاسياڤتش J. Lukasiewicz المعروف بنظرية ارسطو القياسية(١١). كما درست مخلفات الفلاسفة اليونان من زاوية ماتوصل اليه العقل الانساني في الفيزياء والرياضيات والبيولوجيا والكيمياء والتكنولوجيا وغيرها.

تتلخص خطة البحث في ابراز عدة اوجه منطقية ورياضية يرتبط بعضها ببعض بحيث تؤلف في مجموعها الطرق المتعددة لمنطق الخوارزمي الذى

اعتمده في الجبر والمقابلة في البناء ، وفي الرد الى الاشكال الرئيسة الستة من المعادلات ، وفي ايجاد الحلول الجبرية والهندسية للمجاهيل ، ويمكن اجمال مانستهدفه في منطق الخوارزمي بالاوجه الاتية : —

أ — كشف البناء الجبرى الذى استهدف الخوارزمي اقامته مع مقارنة ذلك بأنظمة العلم البرهاني : النظام المنطقي والنظام الهندسي .

ب — كشف الطريقة العامة ومجموعة الاجراءات التي اتبعها الخوارزمي في الحصول على الحقائق الجبرية : النظرية والعملية ، مع الاهتمام بالبراهين التي اعتمد عليها في ابتداع الاساليب والاجراءات .

ج — كشف طريقة الرد الجبرى في حل المسائل الجبرية المختلفة . وذلك عن طريق رد المعادلات المختلفة في الصيغ الى الاشكال الرئيسة الستة ومايقترن بها من حلول جبرية .

د — كشف العلاقة بين الجبر والهندسة باسلوب الخوارزمي ذاته ، لادراك طريقة اكتشاف الحل لبعض المعادلات الرئيسة . والتعبير عن الحل الهندسي باسلوب جبرى عام يأخذ صورة الدستور .

وفي سبيل تحقيق هذه الاوجه في البحث لابد لنا من تحديد دقيق لبعض المفاهيم العلمية مثال ذلك مانقصده بالمنطق واختلاف منطق الخوارزمي عن منطق ارسطو ، ومانقصد بالجبر والمقابلة ، مع الاهتمام كذلك بالفن الارتباطي Ars Combinatoria والحساب وعلاقتهما بمنطق الخوارزمي ، وبذلك يكون السبيل ممهدا نحو التحليل المنطقي لعناصر الجبر والمقابلة لاظهار المفاهيم الاولية المستخدمة في الجبر والتعريفات الضرورية ، ثم بناء الصيغ اوالاشكال الجبرية الستة بالاعتماد على المفاهيم الاولية مع كشف مجموعة العمليات الجبرية والحسابية التي تساعد الباحث في الوصول الى النتائج مهما اختلفت المقدمات والمفروضات ، وهكذا تقودنا الخطة بالضرورة الى كشف الجوانب المنطقية والرياضية للطرق المختلفة الموصلة الى الحلول الصحيحة مع بيان الجانب التعليمي في تفكير الخوارزمي وتسخير المعرفة الجبرية لمقتضيات العصر وضروريات ـــــه .

المنطق والطريقـــــة :

٢ . لقد اقترن المنطق باسم ارسطو (٣٨٤ – ٣٢٢ ق . م) عـلى اساس انه المؤسس لهذا العلم وواضع اصوله وشارح مايرمي اليه ، على الرغم من ان بداياته وبعض قوانينه تمتد الى المحاولات الاولى للانسان في فهم مايجرى حوله وتنظيم معرفته واستنتاج بعض القضايا من خلال طرحه لمقدمات يعتقد بصدقها (١٢) .

واقترنت الهندسة باسم اقليدس (٣٦٥ ؟ – ٣٠٠ ؟ . م) على اساس انه اول من اقام نظاما لعلم الهندسة وفق شروط منطقية معينة تنظمت بموجبها القضايا الهندسية في ترتيب وتنسيق منطقيين ، على الرغم من أن – بدايات هذا العلم تمتد الى المحاولات الاولى للانسان في استنباط حقائق هندسية عامة من خلال تجاربه وخبراته في بناء الحضارة واتقاء اخطار الكوارث الطبيعية مثل الفيضانات واقامة المعابد والسدود والقصور وغيرها من الاوجه العمرانية (١٣) .

ولابد لنا من ان نثير السؤال الآتي :– لماذا نقرن المنطق بارسطو والهندسة باقليدس ، اذا علمنا ان عددا غير قليل من العلماء ممن سبقوا ارسطو في المنطق واقليدس في الهندسة وجاهدوا في تطوير هاتين المعرفتين ؟ نجد جواب هذا السؤال عند مراجعتنا لتطور المنطق ، اذ لم يصبح المنطق معرفة نظرية مضبوطة ، ولم يأخذ شكله الاستدلالي كمعرفة منظمة الاعند ارسطو الذى ترك لنا آثاره المنطقية التي جمعت من بعده في كتاب عرف بالالة اوالاورغانون (Organon) وفيه تجلت غاية ارسطو في بناء المنطق كعلم برهاني يبدأ من مقدمات مفروضة ومفاهيم موضوعة واستدلالات وبراهين . (١٤)

اما مايخص الهندسة كعلم نظرى فان لاقليدس الفضل الكبير في توحيد المعرفة الهندسية في نظام متناسق يبدأ من مفاهيم هندسية وبديهيات (Axioms) ومصادرات (Postulates) ليصل الى البرهان على صدق قضايا هندسية اخرى هي ليست بديهيات وليست مصادرات وتعرف عادة بالمبرهنات Theorems . وتجلت غاية اقليدس في كتابه الذى عرف بالاصول Elements في بناء الهندسة كعلم برهاني يعتمد على البرهان والاستنتاج المنطقي لاثبات صدق

القضايا الهندسية من دون اللجوء الى الخبرة الحسية والتجربة ، وذلك عن طريق اختيار مجموعة قليلة من المقدمات Premisses للبرهان على جميع القضايا الهندسية المعروفة .

وكان للمنطق والهندسة تأثيرهما البالغ في تصور العلماء لما يجب ان تكون عليه المعرفة العلمية ، فنجد عددا من الباحثين قديما وحديثا يتناولون منطق ارسطو بالشرح والتحليل والاضافة والتطوير ، ولم يفقد اهميته في الدراسات الفلسفية والمنطقية حتى يومنا هذا (١٥) على الرغم من ابتداع علماء الرياضيات والمنطق في العصور الحديثة انواعا منطقية اخرى واساليب مبتكرة في معالجة مشكلات العلوم واسسها ، وحظيت الهندسة باهتمام علماء الرياضيات والطبيعة والفلسفة ، واتخذت نموذجا للعلم المنظم يحتذى به عند بناء معرفة علمية جديدة (١٦) ، وامتدت اليها يد البحث والشرح والدراسة واثير حول بعض المسائل فيها عدد من المشكلات كان من ابرزها المشكلة المعروفة بالتوازى (١٧) . واهتم علماء الرياضيات العرب بهذه المشكلة وتناولها بالبحث عدد منهم ، فالفوا الكتب والرسائل العلمية ، يذكر منهم عمر الخيام (توفي في ١١٢١م) والخازن والشني والنيريزى وابن الهيثم(١٨) ، بينما يذكر نصير الدين الطوسي (١٢٠١ – ١٢٧٤) – اخرين فيقول « فمنهم من بدلها (أى مصادرة التوازى) بمصادرة اخرى قريبة منها في الظهور والخفاء وهو ابو علي بن الهيثم المتبحر في الفن الرياضي ، ومنهم من اقام عليها برهانا مبنياً على مقدمة لايتقدمها الى الوضوح والجلاء وهو الحكيم العالم ابو الفتح عمر الخيامي ، ومنهم من بناها على مقدمة مغالطية لايتروج على صاحب الفطنة والذكاء وهو الفاضل العباس بن سعيد الجوهرى (١٩) » كما اضيفت الى الهندسة قضايا جديدة وبذلت محاولات لازالة ماظهر فيها من ثغرات ونواقص في النظام وفي الطريقة حتى استطاع عالم الرياضيات دافيد هلبرت (١٨٦٢ – ١٩٤٣) اعادة بناء هندسة اقليدس على اسس جديدة خالية من كل الانتقادات التي وجهت اليها وارسى دعائم الطريقة البديهية (Axiomatic Method) المعروفة في الرياضيات والمنطـــق (٢٠) .

ولكن العلم الرياضي لايقتصر على الهندسة ، وان الفروع الاخرى التي اهتم انسان وادى الرافدين ووادى النيل بها لاتقل اهمية عن الهندسة ، فالجبر

والاوجه الرياضية لعلم الفلك من الابداعات الرياضية المهمة ، وعرف اليونان بفضل اتصالهم الحضارى بالحضارة البابلية والمصرية ان العلم الرياضي يضم اربعة فروع هي الهندسة والحساب والموسيقى والفلك ، فمنذ فيثاغورس (٥٦٩ — ٥٠٠ ق . م) شمل العلم الرياضي الفروع الاربعة نتيجة اتصاله بمصر وبابل ، فمن المعروف انه سافر الى مصر ومكث فيها زمنا ، واتصل برجال الدين فيها وتعلم منهم ، وزار بابل ومكث فيها مدة طويلة فتعلم من اهلها العلوم الرياضية ، ثم عاد الى اليونان ليؤسس فرقة سرية عرفت باسمه امتزجت في تعاليمها افكار لاهوتيه واسطورية الى جانب الاهتمام بالمعرفة الرياضية (٢١) .

لقد تركز انجاز اليونان حول الهندسة والطريقة الاستدلالية فيها ، بينما لم يحققوا ذات المستوى بالنسبة للفروع الاخرى ، ولانجد في ابحاثهم ما يشير الى اهتمامهم بالجبر على الرغم من احتكاكهم بالبابليين الذين تميزت عقليتهم بالابداع الجبرى (٢٢) .

ان اهتمـــام اليونان الشديد بالهندسة من الزاوية البحتة المنطقية والصورية لايعني مطلقـــا انهم واضعو اسس الرياضيات البحتة ، كما لايدل ذلك على ان عقليتهم النظرية افضل من عقلية شعوب الشرق الادنى القديم التي تميزت بالتجريبية وبعض الاوجه النظرية الضرورية .

لقد وقع مؤرخو العلم في اخطاء كثيرة نتيجة نظرتهم الى انجاز الحضارات غير اليونانية من زاوية ضيقة ، حيث امسكوا بهندسة اقليدس ومنطق ارسطو وغيرهما مقاييس يقاس بها ماانجزه الاخرون في العلم . فالمنطق كما نعلم الان ليس بالضرورة ان يكون على طريقة ارسطو فقط . وان الطريقة المنطقية في تنظيـــم المعرفة العلميـــة ليست بالضرورة الطريقة الاستدلالية المطروحـــة في كتاب الاصول لاقليدس فقط ، وان مجرد التفكير برد كل انجاز علمي وفكرى الى اليونان خطأ كبير يقترف بحق العلم وشعوب الارض التي ساهمت في تقدم العلم ونموه .

ان الحساب والجبر من العلـــوم الرياضية المهمة من الناحيتين النظرية والعملية ، اضافة الى اهميتها في العلوم الاخرى ، وبخاصة في الفيزياء ، وللعلماء

العرب دور بارز كبير في ارساء دعائم هذين العلمين ، وكما اقترنت الهندسة باسم اقليدس ، والمنطق باسم ارسطو ، فمن الضروري ان يقترن الحساب والجبر باسم محمد بن موسى الخوارزمي ، لانه اول من نظم المعرفة الحسابية والجبرية وابتكر الاساليب الجديدة في الوصول الى المجهول بدلالـــة المعلوم ، ليحقق طريقة ثابتة وعامة لحل المعادلات الجبرية من الدرجة الثانية .

لاشـك ان شعوب الشرق الادنى القديم قد عرفت طرقا مبتكرة لحـل المسائل الجبرية ، وبالتحديد عرف البابليون الجبر وكانت لهم ابتكارات مهمة في هذا الميدان ، وعرف المصريون حل المسائل الجبرية ، وان كانت انجازاتهم في ميدان الجبر اقل مستوى من الجبر البابلي ، وعلى الرغم من ان معرفتنا بالجبر البابلي تعتمد اساسا على مجموعة محدودة من النصوص المدونة على الالواح الطينية التي عثر عليها ، والتي يعود تاريخ القسم الاكبر منها الى عصر حمورابي (١٨٠٠ – ١٦٠٠ ق . م) ويعود القسم الاخر الى الفترة السلوقية في القرون الثلاثة قبل الميلاد ، الاانها تزودنا بمعلومات تثبت مقدرة البابلي على حل معادلات من الدرجة الثانية واهتمامه بالحساب والفلك .

وانتقل اشعاع العلم من بابل ومصر عبر ممرات كثيرة الى اليونان التي شهدت تطورا كبيرا في مجال الفلسفة والعلم ليعود هذا الاشعاع من جديد الى الشرق في مصر بعد انهيار الحضارة اليونانية ، فبرزت مدرسة الاسكندرية (٣٣) كمركز للاشعاع الفكري والعلمي ، وهي المدرسة التي احتضنت علوم الشرق الادنى القديم بالاضافة الى التراث العلمي والفلسفي اليوناني ، وكان لها اكبر الاثر في دفع مسيرة العلم الى الامام ، حيث برز فيها عدد كبير من العلماء في شتى الاختصاصات ، وانفرد ديوفنطس (حوالي ٢٥٠ م) Diophantus بصناعة الجبر (٣٤) .

ان الطريقة والمفاهيم والحلول التي طرحها ديوفنطس في كتابه (٢٥) لاتمت بصلة الى التفكير الرياضي اليوناني ، واغلب الظن انها مجرد امتداد طبيعي للجبر البابلي ، لاسيما اذا عرفنا ان مدارس يونانية قد تأسست في العراق وسوريا بعد غزو الاسكندر لهما ، وانتقلت الى الاسكندرية علوم

حضارات بابل ومصر بعد ان ترجمت اثارهما العلمية الى اللغة اليونانية باعتبارها لغة الحاكم والعلم . ولكن الجبر لم يتبلور كعلم منظم الاعند الخوارزمي في كتابه المعروف بالجبر والمقابلة (٢٦) ، وقد حقق فيه الاوجه الاتيـــــــه : —

أ . وضع اللبنات الاولى والاسس الرياضية لبناء هذا العلم على قواعد تؤدى في النهاية الى اقامة نظام متماسك للجبر .

ب. وضع اسس طريقة منطقية — رياضية جديدة في حل المعادلات جبريا وهندسيا ورد الاشكال المختلفة من المعادلات الى اشكال جبرية رئيسية .

جـ . تسخير الجبر في الحياة اليومية في حساب المواريث والمعاملات والوصايا اضافة الى ادراك اهميته في الهندسة والمساحة والاعمال الهندسية .

وانه لمما يؤسف له ان يد البحث والدراسة الموضوعية لهذا الانجـــاز الضخم لم تمتد اليه ، ولم تظهر ابحاث منصفة لما انجزه العلماء العرب في علم الجبر بل بالعكس فغالبا مانجد محاولات غريبة في رد انجاز العرب في الجبر الى ماقبلهم ، منكرين عليهم الابداع والابتكار ، وقد اعتمدت اغلب هذه الدراسات على معارف بسيطة بالتراث العلمي العربي عن طريق ماتم نشره اوترجمته من مخطوطات علمية عربية ، وهو لايمثل الاالنزر اليسير .

٣ . اهتم العلمـــاء والفلاسفة العـــرب بالمنطق موضوعا وبالاستـــدلال طريقة ولكنهم في الوقت نفسه اتجهوا بالدراسات العلمية ذات الصلة بعلوم اللغة والرياضيات والطبيعة صوب مجالات جديدة ، فاستحدثوا من اجل ذلك طرقا منطقية جديدة لاعهد لفلاسفة اليونان (٢٧) وعلماء مدرسة الاسكندرية بها(٢٨) ونحن هنا بصدد منطق وطريقة في الجبر تختلف اختلافا جوهريا عن الطريقة المنطقية في الفلسفة والتي استقاها العلماء والفلاسفة العرب من اثار ارسطو المنطقية وغايتنا الان أن نكشف ابرز الاختلافات بين تفكير ارسطو في المنطق خاصة والعلم البرهاني عامة وبين تفكير الخوارزمي المنطقي في الجبر .

من المعروف بين المهمتين في المنطق والرياضيات ان ارسطو واضع اول نظام منطقي يعتمد على الحدود Terms متوخيا منه ان يكون اساسا للدراسات الفلسفية والرياضية لذلك جاء المنطق مستلهما العلم الرياضي من هندسة وحساب

وفلك وموسيقى حيث زخرت اثاره في الاورغانون بامثلة كثيرة ومتنوعة من الهندسة والحساب لشرح مسائله المنطقية ، فكان على منوال الرياضيات يبدأ من مفاهيم اولية مثل الحد والموضوع والمحمول والمقدمة والكلي والجزئي والموجب والسالب وغير ذلك ، وقوانين منطقية في الاستنتاج والاشتقاق واستدلالات كثيرة اتخذت شكل اقيسة Syllogisms حيث يتألف كل قياس من مقدمتين تتبعهما نتيجة بالضرورة لازمة عنها منطقيا ، وقد اختار ارسطو بعض الاقيسة على اساس انها اقيسة تامة (Perfect Syllogisms) (بديهيات اومقدمات اساسية) بينما عمل على رد Reduction بقية الاقيسة بمساعدة قواعد منطقية معينة الى الاقيسة التامة ، وذلك للبرهان على صدق الاقيسة اعتمادا على صدق المقدمات الاساسية .

واشترط ارسطو في تحليله للعلم البرهاني ان يبدأ من مفاهيم اولية غير معرفة واخرى معرفة ، ومن بديهيات هي قضايا صادقة بالضرورة واولية ومباشرة تشترك في اكثر من علم واحد ولاتفتقر الى برهان ، ومن مصادرات لاتختلف عن البديهيات في الشروط الافي ناحية ارتباطها بعلم اوموضوع بحث واحد وانطلق ارسطو في تأكيد ضرورة البدء بقضايا صادقة لاتفتقر الى برهان من حقيقة أن – الضرورة المنطقية تقتضي ان لايستمر ارجاع او رد القضايا بعضها الى بعض الى ما لانهاية وفي ذلك يقول : اما مذهبنا فانه ليس جميع المعرفة برهانية ، فعلى العكس ان معرفتنا للمقدمات المباشرة اوالاولية مستقلة عن البرهان . (وضرورة ذلك واضح لانه لابد لنا من معرفة المقدمات الاولية التي يبدأ البرهان منها ، ولما كان ضروريا ان ينتهي الارجاع في الحقائق البديهية ، فان هذه الحقائق يجب ان تكون غير قابلة للبرهان (٢٩)

اما القضايا الاخرى المنتمية الى موضوع العلم البرهاني فهي في نظره مبرهنات تفتقر الى برهان او اثبات ، لذلك ترد الى البديهيات والمصادرات لاثبات صدقها .

وعلى الرغم من وضوح الطريقة والموضوع والهدف ، الاننا لانجد تعريفا اصطلاحيا دقيقا لمفهوم (المنطق) في مؤلفاته ، وان مانجده هو بعض العبارات المرادفة ، فما هو (منطقي) Logical عندنا اليوم معناه عند ارسطو تحليلي

اومستنتج من مقدمات (٣٠) .

ان تفكير ارسطو المنطقي قد انعكس ولاشك في الفلسفة والعلم على من جاء من بعده ، وبصورة خاصة على علماء وفلاسفة مدرسة الاسكندرية وفي هندسة اقليدس ، حيث جاء بناؤه متفقا مع الشروط المنطقية التي ثبتها ارسطو للعلم البرهاني ، واختلفت الهندسة في الطريقة البرهانية عندما سارت باتجاه استدلالي ، يبدأ البرهان فيها من البديهيات والمصادرات والتعريفات نزولا الى استنتاج نتيجة هي مامطلوب البرهان عليه ، بينما اتبع ارسطو في نظريته المنطقية في القياس طريقة الرد وذلك بارجاع القياس الناقص Imperfect Syllogism الى قياس تام(٣١) .

لقد وجد المنطق وتحليل ارسطو للعلم البرهاني مكانة بارزة عند الفلاسفة والعلماء العرب ، حيث ركز الفلاسفة على دراسة الاستدلال القياسي وتناول العلماء الاستدلال عامة وتحليل العلم البرهاني وانتشر بين الفلاسفة العرب ان المنطق يتناول دراسة القوانين التي تصون العقل من الوقوع في الخطأ وتوجهه نحو معرفة الصواب بينما اهتم العلماء العرب بصلة المنطق بالعلوم والشروط التي يجب توفرها في العلم البرهاني .

لقد طرح الخوارزمي منطقا جديدا في الجبر والمقابلة يختلف عن منطق ارسطو والطريقة الاستدلالية في هندسة اقليدس ، فهو منطق متحقق في علم رياضي لايكتفي بوضع الشروط ، ويطبق طريقة جديدة في الرد تتفق في بعض الوجوه مع طريقة ارسطو في الرد المنطقي ولكنها تختلف في الوقت نفسه في التفصيلات .

يختلف علم الجبر عن علم الهندسة والمنطق من حيث الموضوع ، فبينما تهتم الهندسة كعلم نظرى بمفاهيم خاصة مثل النقطة والخط والمستوى والدائرة والاسطوانة وغيرها ، نجد ان المنطق مهتم بمفاهيم خاصة به ، في حين تبرز في علم الجبر مفاهيم جديدة يستخدمها الخوارزمي مثل المال والجذر — والعدد المفرد اضافة الى مفاهيم حسابية اخرى .

وفي الحقيقة اننا نجد لاول مرة اسساً نظرية رياضية تختلف كليا عن

الاسس الهندسية والمنطقية في ربطها مفاهيم جبرية واخرى حسابية في صيغ واحدة وفي اتخاذ الصيغ الجبرية العامة والقوانين الجبرية في الحل اساسا تجرى بمقتضاها التطبيقات الحسابية ، وفي البناء الجبرى الذى يبدأ بالمفاهيم لينتقل الى تثبيت الاشكال الجبرية الاساسية والقوانين والقواعد الجبرية ليصل الى البرهان على رد معادلات اخرى من الدرجة الثانية الى الاشكال الستة الرئيسة لتكون جاهزة للحل بالدستور .

ويكمن الاختلاف الاخر بين منطق الخوارزمي والمنطق الارسطي والهندسة في ان الاول لايعتمد على طرح بديهيات اومصادرات مفروضة فهو لايتفق من حيث الاساس مع جوهر التفكير اليوناني المنطقي ، بل يطرح منذ البداية اشكالا جبرية اساسية يجرى بمقتضاها العمل باعتبارها انماطا اساسية prototypes للنظرية الجبرية ، بينما تتضمن الطرق المختلفة للحل قواعد جبرية وبعض القوانين الاساسية ، وهي قواعد وقوانين يتخذها الخوارزمي ادوات لحل المعادلات المختلفة ، ولكن ذلك لايعني مطلقا ان منطق الخوارزمي خلو نهائيا من البديهيات بل المقصود هو انه لم يفترض مقدماته الجبرية الست على اساس انها بديهيات وانما افترضها لسبب آخر لوجود حلول ثابتة لها تنتهي عندها جميع اشكال معادلات الدرجة الثانية وسنشير في الوقت المناسب الى بعض البديهيات التي استخدمت ضمنا في الحلول الجبرية .

واخيرا فان الطريقة الخوارزمية تهدف من حيث الاساس الى الكشف عن المجهول بدلالة المعلوم ، وليس البرهان على صدق المعلوم بدلالة صدق المقدمات كما هو الامر في الهندسة ، وهذا يدل على ان الخوارزمي يسلك في الجبر طريقا مختلفا عن الطريقة الاقليدية في الهندسة ، ولاجل ذلك يطرح عدة اشكال رئيسية من المعادلات الجبرية ويبتدع الطرق المختلفة لحلها ببعض القواعد العامة التي لايزال الجبر الحديث يعتمد عليها .

وفي كل ماذهب اليه تبدو الافادة من الحساب والموازنة بين الحساب والجبر واضحة ، فللجبر حدود خاصة تستخدم الاعداد الصحيحة والكسور وعمليات حسابية واخرى جبرية ، ولعلم الحساب مفاهيمه اوحدوده التي هي الاعداد وعمليات لاستخدام النتائج عن طريق الضرب والطرح والجمع

والقسمة وهي عمليات لاتقتصر على الاعداد الموجبة بل تتعدى ذلك الى الاعداد السالبة والكسور المختلفة . ادرك الخوارزمي اهمية الاعداد وقوامها فذهب الى القول «وأني لما نظرت فيما يحتاج اليه الناس من الحساب وجدت جميع ذلك عددا ووجدت جميع الاعداد انما تركبت من الواحد والواحد داخل في جميع الاعداد» (٣٢) .

وفي هذا النص مايشير الى ادراك واضح لاهمية الاعداد الطبيعية على اساس ان الحساب جميعه يعتمد على الاعداد وان جميع العمليات الحسابية مهما كانت حدودها اعدادا صحيحة اوكسورا ، ترجع في الاساس الى الاعداد ثم وجد الخوارزمي بذكاء رياضي ان جميع الاعداد تتركب من الواحد — والواحد داخل في جميع الاعداد ، وهذا معناه ان متوالية الاعداد الطبيعية التي بين اهميتها في الشق الاول من النص ، تبدأ بالعدد واحد وان الاعداد الاخرى التالية يدخل فيها الواحد كذلك ، ويمكن التعبير عن هذا القول بالطريقة الاتية : —

العدد ١ يتركب من العدد واحد (١ = ١)

العدد ٢ يتركب من ١ + ١ (٢ = ١ + ١)

العدد ٣ يتركب من ١ + ١ + ١ (٣ = ١ + ١ + ١)

العدد ٤ يتركب من ١ + ١ + ١ + ١ (٤ = ١ + ١ + ١ + ١)

وهكذا يطبق المبدأ على جميع الاعداد

وتظهر الافادة والموازنة كذلك في العمليات الحسابية ، حيث يثبت الخوارزمي ابوابا لحساب الجبر والمقابلة : في الضرب (٣٣) ، وفي الجمع والنقصان (٣٤) ، وفي القسمة (٣٥) ، وهذه هي العمليات الاربع المعمول بها في الحساب كذلك .

ولابد لنا ان نتساءل الان بعد بيان الاختلافات بين منطق الخوارزمي ومنطق ارسطو وهندسة اقليدس عن المعنى الرياضي الذى اقترن بالجبر والمقابلة ، وللاجابة على ذلك ارى ضرورة التمييز بين حساب الجبر والمقابلة

وطريقة الجبر والمقابلة ، لاعتقادى ان هذا المسلك يوضح لنا بعض ماوقع فيه من غموض واخطاء .

لقد ذكر الخوارزمي اسم الجبر والمقابلة في عدة مواضع من كتابه وهي تشير الى انه قصد بالاسم مجموعة المفاهيم الجبرية والحسابية والاشكال الستة الرئيسية للمعادلات الجبرية وجميع العمليات الحسابية في الجبر والاعداد ومن اقواله التي تؤيد ماأذهب اليه : « ووجدت الاعداد التي يحتاج اليها في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور واموال وعدد مفرد لاينسب الى جذر ولاالى مال » (٣٦) .

هذا فيما يتعلق بالمفاهيم ، اما ما يتعلق بالاشكال الجبرية للمعادلات فيقول: « ووجدنا كل ما يعمل من حساب الجبر والمقابلة لابد ان يخرجك الى احد الابواب الستة التي وصفت في كتابي هذا وقد اتيت على تفسيرها فاعرف ذلك » (٣٧) .

ثم يتناول بعد ذلك العمليات الحسابية في باب الضرب والجمع والنقصان والقسمة ، ويذكر في موضع آخر بقوله « وقد قدمنا قبل ابواب الحساب ووجوهها مسائل جعلتها امثلة للستة الابواب المتقدمة في صدر كتابي هذا لابد ان منها ثلاثة لاتنصف فيها الاجذار ، وذكرت ان حساب الجبر والمقابلة لابد أن يخرجك الى باب منها ثم اتبعت ذلك من المسائل بما يقرب من الفهم وتخف فيه المؤنة وتسهل فيه الدلالة ان شاء الله تعالى » (٣٨) .

يظهر لنا الان وبشكل قاطع : **أن الجبر والمقابلة في عرف الخوارزمي حساب اجتمعت فيه مفاهيم جبرية وحسابية واشكال جبرية رئيسة وعمليات حسابية اربع تجرى في ضرب الاعداد والاموال والجذور ، وتجمع وتطرح وتقسم .**

اما طريقة الجبر والمقابلة فانها تشير الى مايجب عمله لحل بعض المعادلات الجبرية ، فالمعادلة الجبرية التي يظهر فيها استثناء (نقصان) يجب ان يكمل شريطة ان يزاد مثل ذلك الى الطرف الاخر ، بينما يشترط ان تطرح او تسقط الاجناس المتساوية في طرفي المعادلة ، ويطلق على الاجراء الاول والثاني اسم الجبر والمقابلة .

لقد ذهب بعض من عمل في تاريخ العلوم ومنهم الدوميلي الى القول: « اما عند العرب فلم يذكر الخوارزمي تفسيرا لهذين اللفظين ، ولكننا نجد ذلك عند محمد بن الحسين بهاء الدين العاملي (١٥٤٨ — ١٦٢١) وهو سوري ، ومؤلف عدة كتب في العربية والفارسية ، واشهر كتبه كتاب الكشكول ولكنه الف ايضا كتبا في الرياضة والفلك ، وهكذا اعطى في كتابه خلاصة الحساب ، التعريف التالي الذى ذكره نسلمان G. H. L. Nesselmann بالنص مع الترجمة الالمانية في كتابه : الجبر عند اليونان (٣٩) ، هذا هو التعريف المشار اليه " الطرف ذو الاستثناء يكمل ، ويزاد مثل ذلك على الاخر وهو الجبر ، والاجناس المتساوية في الطرفين تسقط منها ، وهو المقابلة "(٤٠)

لقد وقع الدوميلي في الخطأ فيما ذهب اليه ، وعذره ، انه اطلع على بعض الترجمات والدراسات المنشورة في زمانه والتي وصلت الى متناول يده ولو عرف ان تعريف هذين اللفظين ظهر في فترات سابقة جدا على ماذكره وانه ليس من المعقول ان يترك امر تعريفهما الى القرن السادس عشر ، لما وصل الى هذه النتيجة الواردة في النص ، وتدل المعلومات التاريخية على ان كتاب الجبر والمقابلة قد فتح بابا رياضيا جديدا ولجه عدد كبير من العلماء وان كتاب الجبر والمقابلة لم يكن الكتاب الوحيد الذى تصدى الى هذا النوع من الحساب ، وان تطورا واسعا قد ظهر في مجال حل المعادلات الجبرية مثل معادلات الدرجة الثالثة التي برز فيها محمد بن عيسى الماهاني في القرن التاسع الميلادى وثابت بن قرة (٨٣٥ — ٩٠٠) وابو جعفر الخازن وغيرهم ، ومعادلات من الدرجة الرابعة التي برز فيها عمر الخيام ، ولايثيرنا العجب اذا وجدنا تعريف الجبر والمقابلة عند عبد الله محمد بن احمد بن يوسف الكاتب الخوارزمي الذى عاش في القرن العاشر الميلادى . فوضع كتابه (مفاتيح العلوم) الذى انجزه حوالي سنة ٩٧٠ م وذكر فيه انواع المعارف والعلوم وتعريفات كثيرة ، ويذكر تعريف الجبر والمقابلة في بحثه عن الحساب فيقول « الجبر والمقابلة صناعة من صناعات الحساب وتدبير حسن لاستخراج المسائل العويصة في الوصايا والمواريث والمعاملات والمطارحات وسميت بهذا الاسم لما يقع فيها من جبر النقصانات والاستثناءات ومن المقابلة بالتشبيهات والقائها مثال ذلك ان يقع في المسئلة مال الا ثلاثة اجذاره يعدل جذرا فجبره

ان تقول مال يعدل اربعة اجذار وذلك ستة عشر لانك تممت المال وزدت عليه ماكان مستثنى منه فصار مالا تاما ثم احتجت ان تزيد مثل ذلك المستثنى على معادله فصار المعادل اربعة اجذار ، واما مثال المقابلة فمثل ان يقع في المسئلة مال وجذران تعدل خمسة اجذار فتلقى الجذرين الذين مع المال وتلقى مثل ذلك من معادله فيحصل مال بمعدل ثلاثة اجذار وذلك تسعة » ((٤١) .

ولتوضيح الجبر والمقابلة بامثلة هذا النص نلجأ الى طريقة الجبر الحديث في التدوين الرمزى ، فتتحول جميع الاقوال الخاصة بالمعادلة في حالة الجبر والمقابلة الى مايأتي : —

س٢ — ٣ س = س

س٢ — ٣ س + (٣ س) = س + (٣ س) الجبر بزيادة (٣ س) الى طرفي المعادلة .

س٢ = ٤ س

س٢ + ٢ س = ٥ س

س٢ + ٢ س — (٢ س) = ٥ س — (٢ س) المقابلة بطرح اوالقاء

س٢ = ٣ س (٢ س) من طرفي المعادلة

س٢ = ٩

من الخطأ الاعتقاد ان طريقة الجبر والمقابلة هي الطريقة الوحيدة المستعملة في كتاب الخوارزمي ، لان التحليل المنطقي لهذا الكتاب يظهر لنا مجموعة كبيرة من الطرق والعمليات الجبرية لحل المعادلات ، وان الجبر والمقابلة مجرد طريقة واحدة من بين هذه الطرق .

٤ . ان الطريقـــة المستخدمة في التدوين الرمـــزى للمفاهيم والحـدود والصيغ الجبرية المختلفة لم تكن معروفة عند الخوارزمي ، وهي لم تظهر فجأة في الكتب الجبرية ، بل مرت بتطورات ومراحل عديدة قبل ان تصل الى ماوصلت اليه الان (٤٢) . وكانت الطريقة المفضلة التي استعملها العلماء العرب في التعبير عن المعادلات الجبرية وحلولها هي الطريقة اللغوية ، ونقصد بها استحداث مفاهيم والفاظ وتعابير خاصة بالجبر ، واستخدام اللغة العربية

في التعبير عن خطوات بناء الصيغ واجراء الحلول الصحيحة ، وبذلك امكن التعبير عن الحدود والمعادلات والحلول بدقة على الرغم من الصعوبات التي تكتنف هذه الطريقة ، واصبح عالم الرياضيات في وضع يسمح له باجراء العمليات الجبرية المعقدة والطويلة من دون حدوث اخطاء ، وهذا أمر يثير الدهشة والاعجاب .

ومن المعروف كذلك ان للخوارزمي كتابا في الحساب بسط في طريقة تدوين الارقام التي لاتزال نستعملها حتى يومنا هذا ، ولكنه لم يستخدم الارقام في كتاب الجبر والمقابلة للتعبير عن الاعداد في المعادلات واقتصر في استخدامها على الرسوم الهندسية التي وردت في كتابه للتعبير عن الاطوال والساحات ، فهو يذكر المعادلة الجبرية بطريقته اللغوية ثم يعبر عنها هندسياً ويثبت على الاضلاع او المساحات الارقام .

وقد يتساءل المرء عن السبب الذى جعل الخوارزمي لايستخدم الارقام في المعادلات على الرغم من معرفته لها .

والجواب كما اعتقد يكمن في النقاط الاتية : —

أ — لم تكن طريقة تدوين الاعداد بالارقام معروفة وشائعة بين الناس كما ان ذكر الارقام في معادلة غير كاملة التدوين الرمزى ليست بالطريقة الصحيحة ، لذلك لجأ الى ذكر اسماء الاعداد مع حدود المعادلة باسلوب لغوى واحد .

ب — كانت الطريقة اللغوية هي الشائعة في الحساب ، وخاصة بين هؤلاء المشتغلين في الوصايا والمواريث ، وقد ذكر الخوارزمي في صدر كتابه مانصه « على ان الفت من كتاب الجبر والمقابلة كتابا مختصرا حاصرا للطيف الحساب وجليله لما يلزم الناس من الحاجة اليه في مواريثهم ووصاياهم وفي مقاسمتهم واحكامهم وتجاراتهم وفي جميع مايتعاملون به من مساحة الارضين وكرى الانهار والهندسة وغير ذلك من وجوهه وفنونه » (٤٣) .

ومادمنا بصدد الاعداد والارقام لابد لنا من ان نوضح حقيقة رياضية مهمة تجنبا لما يثيره الخلط بين العدد والرقم من لبس وابهام واستنتاج خاطئ

فالاعداد مفاهيم حسابية ، بينما الارقام مجرد رموز وصور للاعداد وانه بالامكان التعبير عن الاعداد بانواع مختلفة من الرموز ، وهذا هو عين ما وقع حيث اختلفت الشعوب قديما في رسم صور الاعداد اوالتعبير عنها ، فاذا قلنا ان العرب قبل الخوارزمي لم يعرفوا طريقة تدوين الارقام المعمول بها في الوقت الحاضر فانّ ذلك لايعني مطلقا انهم لم يعرفوا الحساب والعد وطرقا اخرى في التدوين ، فالعرب عرفوا الاعداد واستخدموا العمليات الاربع وغيرها من الامور الحسابية في معاملاتهم التجارية ، كما ازداد — اهتمامهم بعد ظهور الدعوة الاسلامية الكريمة بالحساب في شتى وجوه الحياة وذكر القرآن الكريم الاعداد الطبيعية والكسور في حساب الارث والمعاملات الشرعية واشتدت الحاجة الى الحساب في تعداد الجند وحساب الارزاق — وفروض الزكاة وجباية الاموال والضرائب والمساحة والبناء وغير ذلك .

واستخدم القرآن الكريم الاسماء اللغوية للاعداد والكسور ، كما احتاجت احكامه الى معرفة دقيقة بالضرب والقسمة والجمع والطرح وهذا أمر يعكس بوضوح معرفة الانسان العربي للحساب وضرورة تطوير اساليب جديدة لمنفعة الناس في حياتهم ، واستمر استعمال الاسماء اللغوية للاعداد فترة طويلة من الزمن في كتب الحساب والجبر والطبيعة وغير ذلك من العلوم .

وكان ابرز تطور في اتجاه التدوين الرمزى للاعداد استخدام العرب الحروف الابجدية للتعبير عن الاعداد ، وعلى الرغم من عدم استخدام الخوارزمي لهذه الطريقة وتفضيله طريقة ذكر اسماء الاعداد واستخدام الارقام في الجبر والمقابلة على نطاق ضيق ، الا ان طريقة تدوين الاعداد بالحروف الابجدية وهي الطريقة التي عرفت بطريقة حساب الجمل بقيت مستخدمة جنبا الى جنب مع استخدام الارقام الحسابية واستخدمت الصفة الارتباطية والترتيب الخطي للحروف الابجدية للتعبير عن الاعداد الكبيرة ولتوضيح ذلك نبدأ اولا بالحروف الابجدية المفردة ومايناظرها من الاعداد ثم نبين بامثلة اخرى طريقة التعبير عن الاعداد بحرفين اواكثر .

آحـــــاد	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح	ط
	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

عشرات	ى	ك	ل	م	ن	س	ع	ف	ص
	١٠	٢٠	٣٠	٤٠	٥٠	٦٠	٧٠	٨٠	٩٠
مئات	ق	ر	ش	ت	ث	خ	ذ	ض	ظ
	١٠٠	٢٠٠	٣٠٠	٤٠٠	٥٠٠	٦٠٠	٧٠٠	٨٠٠	٩٠٠
الـــف	غ								
	١٠٠٠								

وتقوم طريقة تركيب اوارتباط اكثر من حرف واحد على مبدأ ان يكون الحرف ذو العدد الاكثر هو المقدم ثم يليه الحرف ذو العدد الاصغر فالاصغر مثال ذلك : —

لـــب	رب	تم	خس
٣٢	٢٠٢	٤٤٠	٦٦٠
ريـــح	شلب	قلز	تمـــه
٢١٨	٣٣٢	٢٣٧	٤٤٥

ويشير صاحب كتاب (مفاتيح العلوم) الى امكانية استخدام الحروف التسعة الاولى بالطريقة التي تستخدم فيها الارقام بقوله " وقد يكتب بهذه الحروف كما يكتب حساب الهند وهو ان تكتب بتسعة احرف منها من الالف الى الطاء وتوضع هذه العلامة في المواضع الخالية مكان الصفر في حساب الهند كي يحفظ بها الترتيب فقط . (٤٤)

ان اهم حقيقة نستخلصها من طريقة حساب الجمل هي الادراك الواضح للطريقة الارتباطية واهميتها في الحساب ، فالحرف البسيط يشير الى عدد معين وان الحرف المركب يشير الى عدد مركب ، وان تحليل الحرف المركب الى البسائط معناه في الوقت نفسه تحليل العدد المركب الى بسائطه .

ان خطوة الخوارزمي في استخدام الارقام في كتاب الحساب قد عزز الطريقة الارتباطية وجعلها اكثر بساطة لان اختلاف ترتيب الارقام يؤدى الى اختلاف في الاعداد كما ان انتظام الاعداد وسهولة التعبير عنها بانتظام قد اكسب الطريقة الارتباطية قابلية كبيرة في التعبير عن اى عدد مهما كان

كبيرا اوصغيرا . ويذكر الخوارزمي هذا الانتظام العددى بقوله « ووجدت جميع مايلفظ به من الاعداد ماجاوز الواحد الى العشرة يخرج مخرج الواحد ثم تثنى العشرة وتثلث كما فعل بالواحد فتكون منها العشرون والثلاثون الى تمام المائة ، ثم تثنى المائة وتثلث كما فعل بالواحد والعشرة الى الالف ثم كذلك ترد الالف عند كل عقد الى غاية المدرك من العدد » (٤٥) .

ان لكتاب الحساب للخوارزمي اهمية كبيرة في تاريخ العلم ومسيرة الدراسات الرياضية ، وقد ترجم الى اللغة اللاتينية في القرن الثاني عشر ولايزال النص اللاتيني موجودا ، بينما ضاع الاصل العربي ، وتشير الترجمة اللاتينية الى حساب الارقام الهندية Algorithmi de numero indorum وهـو الكتاب الذى نقله ادلارد باث — Adelard of Bath وان اقدم ترجمة لاتينية لكتاب الحساب للخوارزمي موجودة في مكتبة فينا تعود الى سنة ١١٤٣ ، وان الترجمة الثانية وجدت في دير سالم تحت عنوان « كتاب الخوارزمي Liber algorizmi لاتزال محفوظة الى اليوم في هايدلبرج » . (٤٦)

وهكذا دخل اسم الخوارزمي في تاريخ الرياضيات ، اذ اكتسب المفهوم الرياضي Algorithmus(٤٧) المشتق من اسمه معنى رياضيا يدل على مجموعة العمليات الحسابية المؤدية الى الحلول الصحيحة . كما اقترن اسمه بنظرية المعادلة .

احتوى كتاب الحساب للخوارزمي على طريقة استخدام الارقام الجديدة والعمليات الحسابية الاربع من طرح وجمع وقسمة وضرب وحساب الكسور البسيطة والمركبة وباسلوب تظهر فيه البساطة الى جانب النتائج الصحيحة عند مقارنتة بالاسلوب الذى استعمله العرب في السابق والاسلوب الذى كان شائعا بين الحسابين من اللاتين .

واذا نظرنا الى كتاب الجبر والمقابلة من زاوية حسابية لوجدنا الخوارزمي قد استخدم العمليات الحسابية للاعداد والكسور مطبقة على الجبر ومفاهيمه الجديدة . وهذا دليل يشير الى ان الخوارزمي كتب كتاب الحساب اولا ثم الف كتابه في الجبر والمقابلة بعد ذلك .

ان ابرز مايهمنا الان هو ماظهر في تفكير الخوارزمي من جدة في استخدام

الطريقة الارتباطية بالاضـافة الى طريقة الاختراع التي نقصد بهـا اسلوب الحصول على النتائج بعمليات بسيطة ، ولايمكن تجاهل ماللطريقة الارتباطية من اهمية في التفكير الرياضي ، وهي الطريقة التي شاعت على مايظهر بين علماء اللغة والمناطقة .

عرف علماء اللغة العرب الطريقة الارتباطية واستعملوها في المعاجم وفي دراساتهم لأبنية الالفاظ وعلاقة هذه الابنية بالمعاني في حالة المهمل والمستعمل في اللغة ، ونقصد بالطريقة الارتباطية الخطوات الاتية :

أ . ان نفترض مجموعة من الحروف اوالرموز اوالمفاهيم

ب . ان نحصل على جميع الاحتمالات الممكنة لترابط الحروف اوالرموز اوالمفاهيم .

ج . ان نميز بين مانحصل عليه من ابنية ، ماهو مستعمل وماهو مهمل اومتروك .

ومن ابرز علماء اللغة العرب الذين اخذوا بالطريقة الارتباطية الخليل بن احمد الفراهيدى (١٠٠ -- ١٧٥ هـ) في كتابه (العين) حيث رتبت الاصوات على مايخرج من الحلق واللهوات ، فاولها العين ،الحاء، الهاء ،الخاء الغين، القاف ، الكاف، الجيم، الشين ، الضاد، الصاد ، السين ، الراء ، الطاء الدال، التاء، الظاء ، الذال ، الثاء ، الزاى ، اللام النون ، الفاء ، الميم ، الواو الالف الياء . (٤٨)

وكانت الخطوة الثانية استقراء الابنية اللغوية ، حيث وجد انها اما ثنائية اوثلاثية اورباعية اوخماسية ، ولاتوجد ابنية اخرى في اللغة العربية تخرج عن هذه القاعدة الصرفية ، وبناء على ذلك تكون الاحتمالات المختلفة لارتباطات الاصوات محصورة بين الثنائي والخماسي من الابنية اللغوية، فرأى (الخليل) ان حرف العين مثلا يمكن ان يغير موضعه في البناء الثنائي مرتين بان يكون اولا ، اوثانيا ، وفي الثلاثي ثلاثا بان يكون اولا ، اوثانيا اوثالثا ، وفي الرباعي بان يكـون اولا اوثانيا اوثالثا اورابعا ، وفي الخماسي خمسا . . . . (٤٩) والقاعدة الرياضية التي تتحكم في عملية التقليب

(Permutation) هذه هي : —

في البناء الذى يتألف من حرفين نحصل على صورتين ٢ = ١ × ٢

في البناء الذى يتألف من ثلاثة حروف نحصل على ست صور ٦ = ١ × ٢ × ٣

في البناء الذى يتألف من اربعة حروف نحصل على اربعة وعشرين صورة ٢٤ = ١ × ٢ × ٣ × ٤

في البناء الذى يتألف من خمسة حروف نحصل على مائة وعشرين صورة: ١٢٠ = ١ × ٢ × ٣ × ٤ × ٥

وفي ضوء ذلك تكون القاعدة الرياضية للتقليب كما يأتي : —

« ان عدد التقليبات (الصور) لـ ن من العناصر المختلفة يساوى حاصل ضرب ١ × ٢ × ٣ . . . . ن لجميع الاعداد الطبيعية من ١ الى ن »

اما الخطوة الاخيرة فهي في التمييز بين المستعمل والمهمل من الالفاظ بالاستناد الى المعاني المقترنة بها ، فتسقط جميع الابنية غير المستعملة والتي لامعنى لها في اللغة العربية .

ان الطريقة الرياضية في الارتباط التي ابتدعها العلماء العرب وجدت لها تطبيقات في المنطق ، حيث اشار بوخنسكي الى ذلك صراحة بقوله :
« ان التفكير في ابتداع طريقة ميكانيكية تسهل على المرء الاستنتاج متضمنة في الفن الارتباطي لقدماء الشراح ، عند العرب والمدرسيين » (٥٠)

وانعكست الطريقة الارتباطية في الحساب والجبر والمقابلة واستخدمها الخوارزمي في مجال الاعداد والمفاهيم الجبرية عند صياغته للمعادلات — وامثلته المختلفة التي تدل على اهتمامه في اثبات صحة قواعده الجبرية لجميع الاحتمالات من الاعداد الموجبة وانواع الكسور المرتبطة بحدود المعادلات .

وسنتناول هذه الطريقة ضمنيا عند تحليلنا لحساب الجبر والمقابلة ومقوماته من الحدود والمعادلات والقواعد الجبرية المختلفة دلالة على اهمية الطريقة الارتباطية في المعادلات والاشكال الستة الرئيسة .

٥ . وبعـد ان تم توضيح جوانب الطريقـة الارتباطية ومعاني الجبر والمقابلة

طريقة وحسابا ، لابد لنا من ان نستكمل البحث بتناول جوهر المنطق والطريقة الخوارزمية في بناء النظام الجبرى من حيث الاسس العامة وتفصيلاته وذلك بقصد البرهان من خلال كتاب الجبر والمقابلة على ان الخوارزمي اتبع خطاً منطقيا جديدا في الرياضيات يقترب في روحه من الخط البنائي للرياضيات الحديثة في اقامة النظرية الرياضية والعلمية ، ولاجل ذلك سوف استخدم مفهوم (الحساب) بمعنى جديد واقصد به الحساب المنطقي (Logical Calculus) مبينا ان ما وضعه الخوارزمي في هذا الباب من التفكير المنطقي المنظم يجعله محتلا لمكان الصدارة في تاريخ تطور الرياضيات والمنطق الرياضي .

ان البرهان الذى اسوقه في هذا البحث على ان الخوارزمي هو اول من اقام حسابا منطقيا منظما في الجبر من شأنه ان يضع الخوارزمي اول مؤسس للمنطق الرياضي ، مخالفا بذلك رأى بوخنسكي الذى يبدأ في استعراضه للطريقة الرياضة المنطقية بما حققه ريماندوس لولوس (١٢٣٢ – ١٣١٦)، للبرهان على ان له الفضل في بناء حساب منطقي (٥١) ، ومما يدعم برهاني كذلك ان معظم عناصر مذهب لولوس ترجع الى اصول عربية ، فمن المعروف انه درس اللغة العربية والعلوم التي كانت سائدة آنذاك في الاندلس ومناطق اخرى ، وكتب باللغة العربية بعض مولفاته الى جانب ماكتبه باللاتينية ، اما مذهبه المعروف بالفن الكبير (Ars Magna) فمتاثر بالمنطق والطريقة الارتباطية والجبر العربي ، ويقوم مذهبه على اساس لاهوتي وان جميع العلوم الطبيعية والقانونية والطبية والفلكية والهندسية مجرد تطبيقات لطريقة عامة وعلم واحد ، وان هذه الطريقة تسمح لنا باستنتاج كل الحقائق العلمية ضمن نظام يتألف من اوليات تترابط ميكانيكياً من أجل الحصـــول على النتائج .

ولم يحقق لولوس برنامجه ، وبقيت طريقته العامة التي هي ليست الا طريقة خوارزمية Algorithmus بينما حقق الخوارزمي من قبل برنامجه في ميدان الحساب والجبر (لابد من الاشارة هنا الى ان الفن الكبير قد اطلق كذلك على الاعمال الجبرية " اذ نشر كاردانو G. Cardano سنة ١٥٤٥ كتابه الفن الكبير ، وهو يمثل اهم عمل في الجبر في عصر النهضة الاوربية(٥٢)

ويكتسب برهاني اهمية اذا علمنا ان الطريقة العامة في الفن الكبير للولوس قد اثرت بعد ذلك في تطور العلم والمنطق الرياضي ، فأشار اليها توماس هوبز (١٥٨٨ – ١٦٧٩) وتأثر بها الى حد كبير جوتفريد فلهلم لايبنتز (١٦٤٦ – ١٧١٦) الذى يعد من ابرز علماء المنطق والرياضيات في العصر الحديث ، فكانت طريقته المعروفة باللغة العامة Characteristica Universalis وبرنامجه المنطقي العام امتداد لتأثير لولوس وطريقته .

ان المرء ليدرك بوضوح اهمية الحساب والطريقة الخوارزمية في الرياضيات والمنطق الرياضي لان جميع المحاولات الرياضية الحديثة تنشد تحقيق هذين العنصرين ، بحيث يصبح من البساطة استنتاج جميع الحقائق الرياضية . ولقد حقق الخوارزمي هذين العنصرين في بناء نظريته الجبرية . وما علينا الأن نبرهن على ذلك لاسيما واننا قد حللنا الطريقة الارتباطية ومعنى الالغوريثم " الخوارزمية " وغايتنا الان ان ننظر الى الجبر والمقابلة كنظام يؤلف حسابا منطقيا يوفر بأبسط الطرق استنتاج حقائق جبرية وحلولا صحيحة للمعادلات من الدرجة الثانية باجراءات جبرية بسيطة .

نقصد بالحساب المنطقي مايأتي : —

نظرية اونظام صورى يتألف من مفاهيم اساسية وتعريفات لبعض المفاهيم كما ينطوى من حيث الاساس على قواعد بنائية Rules of Formation تسمح ببناء قضايا اوصيغ صحيحة البناء ، وقواعد تحويلية Rules of Transformation تسمح بالانتقال من صيغ مفروضة الى نتائج تلزم عن المقدمات بالضرورة (وفي حالة جبر الخوارزمي تعمل القواعد التحويلية على رد الاشكال المختلفة من معادلات الدرجة الثانية الى المقدمات المفروضة وهي الاشكال الرئيسة الستة) .

وفي ضوء هذا التعريف الحديث للحساب المنطقي مع الاشارة الى طريقة الرد الخوارزمية سنحاول تحليل كتاب الجبر والمقابلة بالتسلسل المنطقي لتفكير الخوارزمي في بناء نظريته الرياضية ، ومعنى ذلك ان نبدأ بالمفاهيم الاساسية .

أولا – المفاهيم الاساسية للنظريـــــة

١ . مفاهيم حسابية :

يذكر الخوارزمي الاعداد الطبيعية ويستعمل الكسور البسيطة والمركبة في المعادلات ، وهو في كل ذلكيتناول الاعداد الموجبة والكسور الموجبة ويذكر العدد صراحة عند تناوله لحدود المعادلة الجبرية(٥٣) .

٢ . مفاهيم جبريـــــة :

يذكر ذلك في قوله لتعيين حدود المعادلة « ووجدت الاعداد التي يحتاج اليها في حساب الجبر والمقابلة على ثلاثة ضروب وهي جذور واموال وعدد مفرد لاينسب الى جذر ولاالى مال » (٥٤) (لابد من الاشارة الى ان الخوارزمي يستعمل لفظة (مال) في كتابه بمعنيين الاول ويقصد به المعنى الجبرى الاصطلاحي ، والثاني يقصد به المبلغ ، كما يستعمل لفظة الشيء بمعنى الجذر في عدة مواضع من كتابه .

٣ . مفاهيم مشتركـــــة :

ونقصد بها تلك المفاهيم التي استخدمها الخوارزمي في علم الحساب وفي الجبر والمقابلة ، وقد وردت – هذه المفاهيم عند صياغة المعادلات واجراء العمليات الجبرية لمعرفة المجهول في المعادلة ، فالكلمة (تعدل) في قوله مثلا " الاموال التي تعدل الجذور ، والحرف (و) للدلالة على الاضافة اوالجمع كما في قوله « أموال وجذور تعدل عددا » ويستعمل لفظة « زدت عليه » لتدل على الجمع كذلك . ويستعمل لفظة « ينقص » للدلالة على النقصان اوالطرح كما يستعمل الفاظا للدلالة على الضرب والقسمة ، مثال ذلك خمسة فى خمسة يكون خمسة وعشرون ، وعشرة قسمتها . قسمين وبصورة عامة يستخدم الخوارزمي عدة الفاظ لغوية اخرى للدلالة على الجمع والنقصان والضرب والقسمة .

٤ . تعريفات :

ونظرا لما يقتضيه البحث في حدود الجبر فان الخوارزمي يعرف حدود المعادلة الجبرية لتقريب معانيها الى الذهن ، وهي تعريفات لاتختلف كثيرا في وظيفتها عن تعريفات اقليدس للمفاهيم الهندسية « فالجذر منها كل شيء مضروب في نفسه من

الواحد وما فوقه من الاعداد ومادونه من الكسور ، والمال كل مااجتمع من الجذر المضروب في نفسه ، والعدد المفرد كل ملفوظ به من العدد بلا نسبة الى جذر ولا الى مال » (٥٥)

ولتقريب هذه المفاهيم جميعا من لغة الجبر الحديث نقول :

ان الاعداد الطبيعية والكسور من المفاهيم الحسابية المستخدمة في حساب الجبر والمقابلة ، ويقصد بالاعداد الطبيعية من الواحد ومافوقه من الاعداد (١ ، ٢ ، ٣ ، ٥ . . . . . ن) ويقصد بالكسور ماهو دون الواحد اواجزاء الواحد

($\frac{١}{٢}$ ، $\frac{١}{٣}$ ، $\frac{١}{٤}$ ، $\frac{١}{٥}$ ، $\frac{٢}{٣}$ ، $\frac{٣}{٤}$ . . . .)

ومن الكسور مايجمع بين العدد الطبيعي والكسر البسيط($\frac{١}{٢}$ ١ ، $\frac{٣}{٤}$ ٢ . .)

وهي الكسور المركبة .

اما المفاهيم الجبرية فان الجذر اوالشئ هو مانشير اليه بالحرف س وأن المال هو مانشير اليه بالرمز س٢ ، ونستخدم الرموز الاتية للدلالة على المفاهيم المشتركة بين الحساب والجبر : —

يعادل = ، جمع + ، نقصان — ، ضرب × ، قسمة ÷ ، كما سنحتاج الى علامة الجذر التربيعي $\sqrt{}$ عندما ننتقل من س ٢ الى س أو من المال الى جذره .

ولما كانت الاعداد التي نقرنها بحدود المعادلة متغيرة ، فمن الضرورى ان نختار ثلاثة رموز مختلفة هي أ ، ب ، جـ حيث يظهر أ مع المال وب مع الجذر و جـ بلا نسبة الى مال اوجذر .

وبناء على ماتقدم تكون المفاهيم اوالحدود لحساب الجبر والمقابلة بالصورة النهائية كما يأتي : —

اموال وجذور واعداد وكسور ومساواة وجمع ونقصان وضرب وقسمة وجذر تربيعي .

ثانيـــــا :

تحتوى المعادلة الخوارزمية على طرفين هما : الطرف الايمن والطرف الايسر ، وتربط بينهما المساواة للدلالة على تعادل الطرفين في القيمة ، وبالصيغة الرمزية تكون صورة المعادلة . . . . . = ... فاذا كانت حدود حساب الجبر والمقابلة ثلاثة هي المال

والجذر والعدد المفرد ، فأن الصيغ الصحيحة البناء التي تعينها قواعد بناء الحساب المنطقي يجب ان تكون على مجموعتين : المجموعة الاولى وتضم الصيغ التي تحتوى على حدين فقط ، فاذا مااستخدمت الطريقة الارتباطية نحصل على ست صور للمعادلات :

١ . أموال تعدل جذورا ، اموال تعدل عدداً ، جذور تعدل عدداً

٢ . جذور تعدل اموالا ، عدد يعدل اموالا ، عدد يعدل جذورا

لاشك في ان الخوارزمي قد ادرك بوضوح ان المجموعة (١) لاتختلف عن المجموعة (٢) من الناحية الجبرية ، لان المعادلة واحدة سواء كانت أموالا تعدل جذورا ، اوجذورا تعدل أموالا وكذلك تكون المعادلة واحد بالنسبة للبقية .

واخيرا فان ماتوفره الطريقة الارتباطية هو ثلاث صيغ صحيحة البناء لهذا النوع من المعادلات .

ويعين هذه الصيغ بقوله « فمن هذه الضروب الثلاثة مايعدل بعضها بعضا وهو كقولك أموال تعدل جذورا ، وأموال تعدل عددا ، وجذور تعدل عددا » (٥٦) .

وباستخدام طريقة التدوين الرمزى في الجبر نحصـــل على اشكال المعادلات بالصور الاتية : —

أ س٢ = ب س

أ س٢ = جـ

ب س = جـ

المجموعة الثانيـــة :

وتضم الصيغ التي تحتوى على ثلاثة حدود مختلفة في كل معادلة ، ولقد استخدم الخوارزمي الجمع والمساواة لربط هذه الحدود بعضها ببعض فاذا ما استخدمت الطريقة الارتباطية فان ما نحصل عليه من أشكال يكون اثنى عشر صورة حسب الجدول الاتي : —

١ — اموال وجذور تعدل عددا	٢ — عدد يعدل اموالا وجذورا
اموال وعدد تعدل جذورا	جذور تعدل اموالا وعددا
جذور وعدد تعدل اموالا	اموال تعدل جذورا وعددا

٣ ـ جذور واموال تعدل عددا	٤ ـ عدد يعدل جذورا واموالا
عدد واموال تعدل جذورا	جذور تعدل عددا واموالا
عدد وجذور تعدل اموالا	اموال تعدل عددا وجذورا

بالاستناد الى مبدأ المعادلة ، فأن الاشكال الواردة في (٢) لاتختلف عن الاشكال في (١) ، كما ان الاشكال الواردة في (٤) لاتختلف عن الاشكال في (٣) ، وبذلك تبقى ستة اشكال .

ولقد بين الخوارزمي من خلال حلوله لبعض المعادلات بردها الى ثلاثة اشكال اساسية ، لان الاشكال في (٣) ترد الى الاشكال في (١) ، وهكذا تبقى ثلاثة اشكال اساسية ذكرها الخوارزمي بالنص : ووجدت هذه الضروب الثلاثة ، التي هي الجذور والاموال والعدد ، تقترن فيكون منها ثلاثة اجناس مقترنة وهي اموال وجذور تعدل عددا ، واموال وعدد تعدل جذورا ، وجذور وعدد تعدل اموالا (٥٧) .

وباستخدام طريقة التدوين الرمزى الجبرية نحصل على الاشكال الجبرية الاتية لمعادلات الخوارزمي الاساسيـــة : ـ

أ س٢ + ب س = حـ

أ س٢ + حـ = ب س

ب س + حـ = أ س٢

ومن المجموعة الاولى والثانية يكون مجموع الصيغ اوالاشكال الجبرية الستة التي ترد اليها الاشكال الاخرى للمعادلات ، ثلاثة منها تستخدم حدين من حساب الجبر والمقابلة في كل معادلة ، وثلاثة اخرى تستخدم ثلاثة حدود في كل معادلة .

ثالثـــا :

يحتـــوى حساب الجبر والمقابلة على مجموعة من البديهيات وقوانين جبرية وحسابية وقواعد للتحويل والاستنتاج ، ولانقصد هنا بالبديهيات ان الخوارزمي ذكرها صراحة بين مقدمات ، بل نجدها واضحة من خلال الحلول الجبرية ، ففي طريقة جبر المعادلة نجد لبديهية الاضافة دورا مهما كما نجد في طريقة المقابلة تطبيقا لبديهية

الطرح ، مثال ذلك : —

١٠ س — س٢ = ٢١

١٠ س — س ٢ + (س٢) = ٢١ + (س٢)

الجبر هنا باضافة س٢ الى طرفي المعادلة وهنا تجد البديهية التالية تطبيقا : "اذا اضيفت كميات متساوية الى اخرى متساوية تكون النتائج متساوية"

وبذلك نحصل على النتيجة الاتية : —

١٠ س = ٢١ + س٢

اما بديهية الطرح فانها تجد لها تطبيقا في حل المعادلة الاتية :

س٢ + ٥ س = ٧ س

س٢ + ٥ س — (٥س) = ٧ س — (٥ س)

وذلك بطرح (٥ س) من طرفي المعادلة بالاستناد الى بديهية الطرح : "اذا طرحت كميات متساوية من اخرى متساوية تكون النتائج متساوية" .

وبذلك نحصل على النتيجة الاتية : —

س٢ = ٢ س

وبالاضافة الى البديهيتين المذكورتين نجد مجموعة مهمة من القوانين الحسابية والجبرية ، واول هذه القوانين مايعتبره الخوارزمي متساويا :

اموال وجذور = جذور واموال

اموال وعدد = عدد واموال

جذور وعدد = عدد وجذور

فاذا اتخذنا من الحروف **س ، ص ، ع ، م** رموزا تشير الى مقادير جبرية اوحسابية ، فان تفكير الخوارزمي المنطقي يفترض القانون التبديلي Commutative Law للجمع : —

[١] **س + ص = ص + س**

ومن خلال العمليات الجبرية لحل المعادلات يفترض تفكير الخوارزمي المنطقي قانونا مهما في الجبر ينص : —

[٢] س × س = س٢

بغض النظر عن مقدار س سواء كان بسيطا اومركبا مثال ذلك :—

$$٥^{٢} = ٥ + ٥$$

$$(١٠ - س)٢ = (١٠ - س)(١٠ - س)$$

ويلخص في باب الضرب مجموع العمليات بقوله : « وانا مخبرك كيف تضرب الاشياء وهي الجذور بعضها في بعض اذا كانت منفردة اوكان معها عدد ، اوكان مستثنى منها عدد ، اوكانت مستثناة من عدد وكيف تجمع بعضها الى بعض ، وكيف تنقص بعضها من بعض» (٥٨) . ينطوى هذا القول على ابرز العمليات الجبرية التي سنأتي على تثبيتها والتي يذكرها الخوارزمي بترتيب منطقي منظم : —

١ . قاعدة ضرب الاعـــداد :

لابد لكل عدد يضرب في عدد من ان يضاعف احد العددين بقدرمافي الاخر من الاحاد (٥٩) مثال ذلك أن نضرب العدد ثلاثة في العدد اربعة لنحصل على العدد اثنى عشر .

٢ . قاعدة التوزيع في الضرب :

«اذا كانت عقود ومعها آحاد اومستثنى منها آحاد فلا بد من ضربها اربع مرات ، العقود في العقود والعقود في الاحاد ، والاحاد في العقود والاحاد في الاحاد» (٦٠) .

تنطوى هذه القاعدة على عدة حقائق حسابية ، وفيها يبرهن الخوارزمي على فهم رياضي مبدع ، خاصة اذا علمنا ان هذه القاعدة هي الصحيحة في الرياضيات الحديثة ، ولتوضيح ذلك ندرج الحالات الممكنة في الضرب كمـــا يأتي : —

الحـــالة الاولـــى :

اذا اردنا ان نضرب ١٢× ١١ ، فان كل عدد منهما يتحلل بالنسبة للخوارزمي الى عقود وآحاد ، ويضرب بالطريقة الاتية : —

$$(١٠ + ٢)(١٠ + ١)$$

الحـــالة الثانية :

اذا اردنا ان نضرب ٨ × ٩ فان كل عدد منهما يتحلل الى عقود وآحاد مستثناة بالطريقة الاتية : —

(١٠ — ٢) (١٠ — ١)

الحالـــة الثالثة :

اذا اردنا ان نضرب ١٢ × ٩ فأن العدد الاول والعدد الثاني يتحلل بالطريقة الانفة الذكر في حالة الايجاب وحالة الاستثناء اوالسلب بالطريقة الاتيـــة : —

(١٠ + ٢) (١٠ — ١)

وتتم عملية الضرب استنادا الى القاعدة السابقة مع مراعاة العلامات في حالة الزيادة والنقصان ، ويضيف ذلك بقوله : —

« فاذا كانت الاحاد التي مع العقود زائدة جميعا فالضرب الرابع زائد ، واذا كانت ناقصة جميعا فالضرب الرابع زائد ايضا ، واذا كان احدهما زائدا والاخر ناقصا فالضرب الرابع ناقص » (٦١) .

في هذا القول قاعدة جبرية وحسابية مهمة هي قاعدة ضرب العلامات والتي يمكن عرضها على هيئة عامة كما يأتي : —

+ س × + ص = + سص

— س × — ص = + سص

+ س × — ص = — سص

— س × + ص = — سص

وبناء على ماتقدم تكون نتائج الضرب للحالات الثلاثة كما يأتي : —

بالنسبة للحالة الاولى : ١٠٠ + ١٠ + ٢٠ + ٢ = ١٣٢

بالنسبة للحالة الثانية : ١٠٠ — ١٠ — ٢٠ + ٢ = ٧٢

بالنسبة للحالة الثالثة : ١٠٠ — ١٠ + ٢٠ — ٢ = ١٠٨

ولم يقتصر تطبيق هذه القواعد على الحساب بل عمل على تطبيقها في عمليات الجبر

وحتما تكون التعابير جبرية وحسابية ، وبذلك يقول ووانما بينت ذلك لنستدل به على ضرب الاشياء بعضها في بعض اذا كان معها عدد او استثنيت من عدد اواستثنى منها عدد » وبذلك نحصل على ماياتي :ـ

(١٠ + س) (١٠ + س) = ١٠٠ + ١٠ س + ١٠ س + س٢

(١٠ ـ س) (١٠ ـ س) = ١٠٠ ـ ١٠ س ـ ١٠ س + س٢

(١٠ + س) (١٠ ـ س) = ١٠٠ ـ ١٠ س + ١٠ س ـ س٢

(١٠ + س) (١٠ ـ س) = ١٠٠ ـ ١٠ س + ١٠ س ـ س٢

وهكذا يمكن القول ان القاعدة التوزيعية في تفكير الخوارزمي المنطقي تفترض قانونا توزيعيا Distributive Law للحساب والجبر ومن خلال الامثلة التي يسوقها في العمليات الجبرية لحل المعادلات .

وفي ضوء ماتقدم نستطيع القول أن منطق الخوارزمي يفترض الصور الاتية للقوانين التوزيعية :

[٣] س (ص + ع) = س ص + س ع

مثال ذلك :ـ

س (١٠ + ٥ س) = ١٠ س + ٥ س٢

[٤] س (ص ـ ع) = س ص ـ س ع

مثال ذلك :ـ

س (١٠ ـ $\frac{١}{٢}$ س) = ١٠ س ـ $\frac{١}{٢}$ س٢

[٥] (س + ص) (ع + م) = سع + سم + صع + صم

مثال ذلك :ـ

(١٠ + س) (١٠٠ + ٢ س) = ١٠٠٠ + ١٠ + ١٠٠ س + ٢ س٢

[٦] (س ـ ص) (ع ـ م) = سع ـ سم ـ صع + صم

مثال ذلك :ـ

(١٠ ـ س) ($\frac{١}{٢}$ ـ ٥ س) = ٥ ـ ٥٠ س ـ $\frac{١}{٢}$ س + ٥ س٢

[٧] (س + ص) (ع − م) = سع − سم + صع − صم

مثال ذلك : —

(١٠ + $\frac{١}{٢}$ س) ($\frac{١}{٢}$ − ٥س) = ٥ − ٥٠س + $\frac{١}{٤}$ س − $\frac{١}{٢}$ ٢ س٢

٣ . قاعدة رد الاموال الى مال واحد

تعتبر هذه القاعدة من القواعد المهمة في حل المعادلات جبريا وهندسيا في كتاب الجبر والمقابلة ، ولقد ذكرها الخوارزمي في مواضع كثيرة من كتابه عندما تكون الاموال في المعادلة ماكثر منها اوقل ، فترد الى مال واحد . وسنأتي على ذكر نصوص عملية رد الاموال الى مال واحد في الفقرة السابعة من هذا البحث ، وتنحصر مهمتنا الان في صياغة القوانين الجبرية التي يعتمد عليها في رد الاموال الى مال واحد .

ينص القانون الجبرى الاول : اذا ماضرب طرفا المعادلة بمقدار واحد فان النتائج تكون متساوية .

اذ افترضنا س = ص (المعادلة)

[٨] فان مس = مص

مثال ذلك :

$\frac{١}{٢}$ س ٢ = ٨

٢ × $\frac{١}{٢}$ س٢ = ٢ × ٨

س٢ = ١٦

وينص القانون الجبرى الثاني : اذا ماقسم طرفا المعادلة على مقدار واحد فان النتائج تكون متساوية .

اذا افترضنا س = ص (المعادلة)

[٩] فان $\frac{ص}{م}$ = $\frac{ص}{م}$

مثال ذلك :

٤ س٢ = ١٦

$\frac{٤ س^٢}{٤}$ = $\frac{١٦}{٤}$

س٢ = ٤

٤ . قاعدة الجبر والمقابلة :

يستخدم الخوارزمي هذه القاعدة في حـــل المعادلات وهي تقوم من حيث الاساس على تبديل Transposition او نقل احد حدود المعادلة من طرف الى طرف آخر. وتعتمد عملية جبر المعادلة عندمايكون فيها استثناء اونقصان على بديهية الاضافة ، بينما تعتمد المقابلة على بديهية الطرح .

[١٠] **س = ص − ع** مثال ذلك : ٣ س٢ = ١٠٠ − ٢ س٢

س + ع = ص ٣ س ٢ + ٢ س ٢ = ١٠٠

[١١] **س = ص + ع** مثال ذلك : ٥ س ٢ = ٢٤ س + ٤ س ٢

س − ع = ص ٥ س ٢ − ٤ س٢ = ٢٤ س (٦٣)

٥ . قاعدة ضرب الاعداد بالاشياء والاموال :

في حالة ضرب العدد في الشيء اوالاشياء فان الناتج يكون اموالا مثال ذلك :

٢ × س٢ = ٢ س

$\frac{٢}{٣}$ × ٣ س ٢ = ٢ س٢

فاذا اعتبرنا س أى مقدار سواء كان عدديا اوشيئا اومالا ورمزنا الى العدد الذى يضرب في المقدار بالحرف أ ، فاننا نحصل على القاعدة التالية :—

[١٢] **أ × س = أ س**

٦ . قاعدة ضرب الجذور التربيعية :

«وان اردت ان تضرب جذر تسعة في جذر اربعة ، فاضرب تسعة في اربعة فيكون ستة وثلاثين فخذ جذرها وهو ستة فهو جذر تسعة مضروب في جذر اربعة » (٦٤)

$\sqrt{٩} \times \sqrt{٤} = \sqrt{٩ \times ٤} = \sqrt{٣٦} = ٦$

و كقاعدة عامة لضرب الجذور نحصل على الصياغة الجبرية الاتية :

[١٣] $\sqrt{س} \times \sqrt{ص} = \sqrt{س\ ص}$

«واعلم ان كل جذر مال معلوم اواصم تريد ان تضعفه ومعنى اضعافك اياه ان تضربه في اثنين ، فيبقى ان تضرب ذلك المال وان اردت ثلاثة امثاله فاضرب ثلاثة في ثلاثة ثم في المال فيكون جذر ما اجتمع ثلاثة امثال جذر ذلك المال الاول وكذلك مازاد من الاضعاف اونقص فعلى هذا المثال نفسه» (٦٥)

$$\sqrt{٣٦} = \sqrt{٩ \times ٢ \times ٢} = \sqrt{٩} \times ٢$$

$$\sqrt{٨١} = \sqrt{٩ \times ٣ \times ٣} = \sqrt{٩} \times ٣$$

وكقاعدة عامة لضرب الاعداد في الجذر التربيعي تحصل على مايأتي : —

$$\sqrt{أ^{٢} س} = \sqrt{س} \times أ \quad [١٤]$$

٧ . قاعدة الجمع والنقصان :

تجمع الاجناس المتشابهة بعضها الى بعض اويطرح بعضها من بعض الاعداد مع الاعداد ، والاشياء مع الاشياء والاموال مع الاموال ، والجذور التربيعة مع الجذور التربيعية . ومن ابرز الامثلة التي يذكرها الخوارزمي على قاعدة الجمع والنقصان مايأتي : —

$$(١٠٠ + س^{٢} - ٢٠ س) + (٥٠ + ١٠ س - ٢ س^{٢}) =$$

$$١٠٠ + ٥٠ + س^{٢} - ٢ س^{٢} - ٢٠ س + ١٠ س =$$

$$١٥٠ - س^{٢} - ١٠ س$$

والمثال الثاني : —

$$(\sqrt{٢٠٠} - ١٠) - (٢٠ - \sqrt{٢٠٠})$$

$$\sqrt{٢٠٠} - ١٠ - ٢٠ + \sqrt{٢٠٠}$$

$$\sqrt{٢٠٠} + \sqrt{٢٠٠} - ٣٠$$

$$٢ \sqrt{٢٠٠} - ٣٠$$

$$\sqrt{٢ \times ٢ \times ٢٠٠} - ٣٠$$

$$\sqrt{٨٠٠} - ٣٠$$

٨ . قاعدة القسمة :

اذا قسمت عددا على عدد فان الناتج يكون عددا ، واذا قسمت الاشياء على عدد ، فأن الناتج يكون اشياء . واذا قسمت اشياء على اشياء ، فان الناتج يكون عددا ، واذا قسمت الاموال على الاشياء ، فان الناتج يكون اشياء :

مثال ذلك :

$$\frac{٤}{٢} = ٢ \quad ، \quad \frac{٩}{٤} = ٢\frac{١}{٤}$$

$$\frac{٤\,س}{٢} = ٢\,س \quad ، \quad \frac{٦\,س}{٢\,س} = ٣$$

$$\frac{٤\,س\,٢}{٢\,س} = ٢\,س$$

« ان اردت ان تقسم جذر تسعة على جذر اربعة فانك تقسم تسعة على اربعة فيكون اثنين وربعا فجذرها هو مايصيب الواحد وهو واحد ونصف . . . . » (٦٦)

$$\sqrt{\frac{٩}{٤}} = \sqrt{\frac{٩}{٤}} = \sqrt{\frac{١}{٤}}\,٢ = ١\frac{١}{٢}$$

[١٥] وكقاعدة عامة $\sqrt{\frac{س}{ص}} = \sqrt{\frac{س}{ص}}$

« واعلم بان كل شيئين تقسم هذا على هذا وهذا على هذا فانك اذا ضربت الذى يخرج من هذا الذى يخرج من هذا كان واحد ابدا » (٦٧)

ويمكن التعبير عن هذه القاعدة العامة بالصيغة الاتية : ـــ

[١٦] $\frac{س}{ص} \times \frac{ص}{س} = ١$

مثال ذلك :

$$\frac{س}{س + ٢} \times \frac{س + ٢}{س} = ١$$

واستخدم الخوارزمي في عدة مواضع القاعدة المعروفة : حاصل ضرب الطرفين يساوى حاصل ضرب الوسطين .

[١٧] $\frac{س}{ص} = \frac{ع}{م} = س\,م = ص\,ع$

مثال ذلك :

$$\frac{س}{س + ٢} = \frac{١}{٢} \quad ، \quad ٢\,س = س + ٢$$

٦ . تبين لنا الان بوضوح لايقبل الشك ان جبر الخوارزمي يؤلف حسابا منطقيا بكل معنى الكلمة ، وانه استهدف من حيث الاساس بناء نظام متكامل للمعادلات من الدرجة الثانية ، بحيث يمكن حل كل معادلة من الجنس نفسه باحدى الطرق المقترحة مع مراعاة مجموع القواعد والقوانين الحسابية والجبرية ، وغايتنا الان ان نتعرض بالتحليل لنقطة منطقية اخرى في منطق الخوارزمي مكملة للحساب المنطقي ، هي طريقة رد المعادلات . والمقصود بالرد هنا البرهان على ان جميع الاوجه لمعادلات الدرجة الثانية ترجع الى الاشكال الستة الرئيسة ونذكر هنا قوله للدلالة على اهتمامه بالرد :

« ووجدنا كل مايعمل به من حساب الجبر والمقابلة لابد ان يخرجك الى احد الابواب الستة التي وصفت في كتابي هذا وقد اتيت على تفسيرها فاعرف ذلك »(٦٨)

كما يخضع حل جميع اوجه المعادلات من الدرجة الثانية الى الطرق نفسها التي ثبتها لحساب الجبر والمقابلة .

ان طريقة الرد من الطرق المنطقية المعروفة ، وقد استخدمها ارسطو للبرهان على صحة الاقيسة وذلك بارجاع كل قياس ناقص الى احد الاقيسة التامة الصحيحة من الشكل الاول باستخدام قواعد وقوانين استنتاجية معينة . وطريقة الرد الخوارزمية ذات اهمية في المنطق والرياضيات معا ، لانها من حيث المبدأ تفترض اشكالا اساسية معينة وحلولا معروفة لها ، وان أية معادلة من الدرجة الثانية مختلفة الشكل لابد ان ترد اولا — الى احد الاشكال الستة ثم يجرى الحل بالطريقة الخوارزمية ثانيـــا .

ان طريقة الرد الخوارزمية تبرهن بصورة منطقية صحيحة على قدرة الحســـاب المنطقي للجبر والمقابلة على توفير الحلول المناسبة واكتشاف المجهول بطريقة بسيطة وضمن امكانات الحساب المنطقي بما فيه من اشكال رئيسة وقواعد وقوانين جبرية وحسابية لتحويل المعادلة المطروحة الى الصورة التي عليها احدى المعادلات الست ، ولاجل توضيح ذلك نأخذ ببعض الامثلة التي يسوقها الخوارزمي لهذا الغرض بالذات :—

المثال الاول :

« نحو قولك عشرة قسمتها قسمين فضربت احد القسمين في الاخر ثم ضربت

احدهما في نفسه فصار المضروب في نفسه مثل احد القسمين في الاخر اربع مرات ، فقياسه ان تجعل احد القسمين شيئا والاخر عشرة الاشيئا فتضرب شيئا في عشرة الاشيئا فتكون عشرة اشياء الامالا ثم تضربه في اربعة لقولك اربع مرات فيكون اربعة امثال المضروب من احد القسمين والاخر فيكون ذلك اربعين شيئا الااربعة اموال فاجبرها بالاربعة الاموال وزدها على المال فيكون اربعين شيئا تعدل خمسة اموال . فالمال الواحد يعدل ثمانية اجذار وهو اربعة وستون جذرها ثمانية وهو احد القسمين المضروب في نفسه والباقي من العشرة اثنان وهو القسم الاخر ، فقد اخرجتك هذه المسألة الى احد الابواب الستة ، هي اموال تعدل جذوراً فاعلم ذلك » (٦٩)

وباستخدام طريقة التدوين الجبرى لعرض الحل من قوله : «فقياسه ان تجعل . . . ألخ» نحصل على مايأتي :

س ، ١٠ — س	(فروض)
س (١٠ — س) = ١٠ س — س٢	[٤]
٤ (١٠ س — س ٢) = ٤٠ س — ٤ س٢	[٤]
س × س = س٢	[٢]
س ٢ = ٤٠ س — ٤ س٢	(المعادلة)

وباستخدام طريقة الجبر التي وردت في قوله فاجبرها. . الخ نحصل على مايأتي :

س٢ + ٤ س٢ = ٤٠ س — ٤ س٢ + ٤ س٢	(بديهية الاضافة)
س٢ + ٤ س٢ = ٤٠ س	[١٠]
٥ س٢ = ٤٠ س	(قاعدة الجمع)

وهذه اموال تعدل جذورا

س = ٨ والقسم الاخر ١٠ — ٨ = ٢

المثال الثاني :

« عشرة قسمتها قسمين فضربت كل قسم في نفسه ثم ضربت العشرة في نفسها فكان مااجتمع من ضرب العشرة في نفسها مثل احد القسمين مضروبا في نفسه مرتين وسبعة اتساع مرة اومثل الاخر مضروبا في نفسه ست مرات وربع مرة ،

فقياس ذلك ان تجعل احد القسمين شيئا والاخر عشرة الاشيئا فتضرب الشئ في نفسه فيكون مالا ثم في اثنين وسبعة اتساع فيكون مالين وسبعة اتساع مال فارده الى مال واحد وهو تسعة اجزاء من خمسة وعشرين جزءا وهو خمس واربعة اخماس فخذ الخمس المائه واربعة اخماس وهو ستة وثلاثون تعدل اموالا فخذ جذرها ستة وهو احد القسمين والاخر اربعة لامحالة فقد اخرجتك هذه المسألة الى احد الابواب الستة وهي اموال ــ تعدل عددا » (٧٠)

وباستخدام طريقة التدوين الجبرى لعرض الحل من قوله : "فقياس ذلك ان تجعل . . . . ألخ" نحصل على مايأتي :

س ، ١٠ ــ س (فروض)

س × س = س٢ [٢]

١٠ × ١٠ = ١٠٠ [٢]

س٢ × ٢ ٧/٩ = ٢ ٧/٩ س٢ [١٢]

١٠٠ = ٢ ٧/٩ س٢ (اموال تعدل عددا)

١٠٠/٥ + ٤/٥ × ١٠٠/٥ = س٢ [٨]

٣٦ = س٢

س = ٦ والقسم الاخر ١٠ ــ ٦ = ٤

المثال الثالث :

« عشرة قسمتها قسمين ثم قسمت أحدهما على الاخر فخرج القسم اربعة فقياس ذلك ان تجعل احد القسمين شيئا والاخر عشرة الا شيئا ثم تقسم عشرة الا شيئا على شئ ليكون اربعة وقد علمت انك متى ماضربت ما اخرج لك من القسم في المقسوم عليه عاد المال الذى قسمته والقسم في هذه المسألة اربعة والمقسوم عليه شئ فاضرب اربعة في شئ فيكون اربعة اشياء تعدل الذى قسمته وهو عشرة الاشيئا فاجبر العشرة بالشئ وزده على الاربعة الاشياء فيكون خمسة اشياء تعدل عشرة فالشئ الواحد اثنان وهو احد القسمين فقد اخرجتك هذه المسألة الى احد الابواب الستة وهي جذور تعدل عددا » (٧١)

وباستخدام الطريقة الرمزية لعرض الحل من قوله « فقياس ذلك ان تجعل . . . . ألخ » نحصل على مايأتي : —

س ، ١٠ — س (فروض)

$\frac{١٠ - س}{س} = ٤$ (المعادلة)

٤ س = ١٠ — س [١٧]

٤ س + س = ١٠ — س + س (بديهية الاضافة)

٥ س = ١٠ (١٠ : قاعدة الجمع) (جذور تعدل عددا)

س = ٢

المثال الرابع :

« مال ضربت ثلثه ودرهما في ربعه ودرهم فكان عشرين قياسه ان تضرب ثلث شيء في ربع شيء فيكون نصف سدس مال وتضرب درهما في ثلث شيء فيكون ثلث شيء ودرهما في ربع شيء بربع شيء ودرهما في درهم بدرهم فذلك كله نصف سدس مال وثلث شيء ودرهم تعدل عشرين درهما فالق من العشرين درهما بدرهم فتبقى تسعة عشر درهما تعدل نصف سدس مال وثلث شيء وربع شيء فكمل مالك واكماله ان تضرب كل مامعك في اثنتى عشر فيصير معك مال وسبعة اجذار تعدل مائتين وثمانية وعشرين درهما فنصف الاجذار واضربها في مثلها تكن اثنتى عشر وربعا فزدها على الاعداد وهي مائتين وثمانية وعشرين فيكون مائتين واربعين وربعا فخذ جذرها خمسة عشر ونصفا فانقص منه نصف الاجذار وهو ثلاثة ونصف يبقى عشر وهو المال فقد اخرجتك هذه المسألة الى احد الابواب الستة وهي اموال وجذور تعدل عددا » (٧٢) وبطريقة التدوين الجبرى لعرض الحل من قوله قياسه أن تضرب . . . . الخ نحصل على مايأتي : —

$(\frac{١}{٣} س + ١)(\frac{١}{٤} س + ١) = ٢٠$ (المعادلة)

$\frac{١}{١٢} س^٢ + \frac{١}{٣} س + \frac{١}{٤} س + ١ = ٢٠$ [٥]

$\frac{١}{١٢} س^٢ + \frac{١}{٣} س + \frac{١}{٤} س + ١ - ١ = ٢٠ - ١$ (بديهية الطرح)

$\frac{١}{١٢} س^٢ + \frac{١}{٣} س + \frac{١}{٤} س = ١٩$ (قاعدة الجمع والنقصان)

س٢ + ٤ س + ٣ س = ٢٢٨ [٨]

س٢ + ٧ س = ٢٢٨ (اموال وجذور تعدل عددا)

وبتطبيق طريقة الدستور التي يصفها للحل من قوله « فنصف الاجذار واضربها . . الخ » تحصل على مايأتي : —

$$س = \sqrt{(\frac{٧}{٢})^{٢} + ٢٢٨} - \frac{٧}{٢}$$

$$س = \sqrt{\frac{٤٩}{٤} + ٢٢٨} - \frac{٧}{٢}$$

$$س = \sqrt{١٢\frac{١}{٤} + ٢٢٨} - \frac{٧}{٢}$$

$$س = \sqrt{٢٤٠\frac{١}{٤}} - \frac{٧}{٢}$$

$$س = ١٥\frac{١}{٢} - ٣\frac{١}{٢}$$

$$س = ١٢$$

المثال الخامس :

« عشرة قسمتها قسمين ثم ضربت كل قسم في نفسه وجمعتها فكانا ثمانية وخمسين درهما ، قياسه ان تجعل احد القسمين شيئاً والاخر عشرة الاشيئاً فاضرب عشرة الاشيئا في مثلها فيكون مائة ومالا الاعشرين شيئا ثم تضرب شيئا في شي فيكون مالا ثم تجمعها فيكون ذلك مائة ومالين الاعشرين شيئا تعدل ثمانية وخمسين درهما فاجبر المائة والمالين بالعشرين الشيء الناقصة وزدها على الثمانية والخمسين فيكون مائة ومالين تعدل ثمانية وخمسين درهما وعشرين شيئا فاردد ذلك الى مال واحد وهو ان تأخذ نصف ما معك فيكون خمسين درهما وما لاتعدل تسعة وعشرين درهما وعشرة اشياء فقابل به وذلك انك تلقي من الخمسين تسعة وعشرين فيبقى احد وعشرون ومال تعدل عشرة اشياء فنصف الاجذار يكون خمسة واضربها في مثلها فتكون خمسة وعشرين فالق منها الواحد والعشرين التي مع المال فيبقى اربعة فخذ جذرهـــا وهو اثنان فانقصه من نصف الاجذار التي هي خمسة يبقى ثلاثة وهي احـد القسمين والاخر سبعة فقد اخرجتك هذه المسألة الى احد الابواب الستة وهي اموال وعدد تعدل جذورا » (٧٣)

وبطريقة التدوين الجبرى لعرض الحل من قوله « قياسه أن تجعل . . . . ألخ » نحصل على مايأتي : —

س٢ + (١٠ – س)٢ = ٥٨ (المعادلة)

س٢ + ١٠٠ + س٢ – ٢٠ س = ٥٨ [٢ ، ٦] (قاعدة الجمع)

٢ س٢ + ١٠٠ – ٢٠ س = ٥٨ (قاعدة الجمع)

٢ س٢ + ١٠٠ – ٢٠ س + ٢٠ س = ٥٨ + ٢٠ س (بديهية الاضافة)

٢ س٢ + ١٠٠ = ٥٨ + ٢٠ س [١٠]

س٢ + ٥٠ = ٢٩ + ١٠ س [٩]

س٢ + ٥٠ – ٢٩ = ٢٩ – ٢٩ + ١٠ س (بديهية الطرح)

س٢ + ٢١ = ١٠ س [١١] (اموال وجذور تعدل عددا)

باستخدام قاعدة الدستور نحصل على مايأتي : –

$$س = \frac{١٠}{٢} \mp \sqrt{\left(\frac{١٠}{٢}\right)^{٢} - ٢١}$$

$$س = ٥ \mp \sqrt{٢٥ - ٢١}$$

$$س = ٥ \mp ٢$$

$$س = ٣ ، س = ٧$$

المثال السادس :

« (مال) ضربت ثلثه في ربعه فعاد (المال) وزيادة اربعة وعشرين درهما فقياسه ان تجعل مالك شيئا ثم تضرب ثلث شيء في ربع شيء فيكون نصف سدس مال تعدل شيئا واربعة وعشرين درهما ثم تضرب نصف سدس المال في اثني عشر حتى تكمل مالك واضرب الشيء في اثنى عشر يكن اثنى عشر شيئا واضرب الاربعة والعشرين في اثنى عشر فيصير معك مائتان وثمانية وثمانون درهما وزدها على مائتين وثمانية وثمانين فيكون ثلثمائة واربعة وعشرين فخذ جذرها وهو ثمانية عشر فزده على نصف الاجذار وهي ستة فيكون ذلك اربعة وعشرين وهو المال فقد اخرجتك هذه المسئلة الى احد الابواب الستة وهي جذور وعدد تعدل اموالا » (٧٤)

وبطريقة التدوين الجبرى لعرض الحل من قوله « فقياسه ان تجعل . . . ألخ »

نحصل على مايأتي : —

$\frac{١}{٣}$ س × $\frac{١}{٤}$ س = س + ٢٤ (المعادلة)

$\frac{١}{١٢}$ س^{٢} = س + ٢٤ (قاعدة الضرب ، ٣)

١٢ × $\frac{١}{١٢}$ س^{٢} = ١٢ (س + ٢٤) [٨]

س^{٢} = ٢ س + ٢٨٨ (جذور وعدد تعدل اموالا)

وبتطبيق قاعدة الدستور نحصل على مايلي : —

س = $\frac{١٢}{٢}$ ∓ $\sqrt{(\frac{١٢}{٢})^{٢} + ٢٨٨}$

س = ٦ ∓ $\sqrt{٣٦ + ٢٨٨}$

س = ٦ ∓ $\sqrt{٣٢٤}$

س = ٦ ∓ ١٨

س = ٢٤ ؛ (س = — ١٢)

٧ . ولابد للمرء ان يتساءل وهو يتابع حل الخوارزمي لمعادلات الدرجة الثانية بطريقة الدستور عن الطريقة التي سلكها والاساس الذى اعتمد عليه في اشتقاق قاعدة اوقواعد الدستور وهل في عمله هذا اصالة وابتكار ؟ أن الاجابة على هذا السوال تفرض علينا ان نناقش اولا خطوته الاولى في تبسيط المعادلة لتكون جاهزة لتطبيق قاعدة الدستور ، فالمعادلات او — الاشكال الرئيسة الستة تحتوى على حدود ، يقترن بالمال وبالجذر عدد ، بينما يظهر عدد مفرد لاينسب الى المال ولاالى الجذر ، يلجأ الخوارزمي الى التخلص من العوامل العددية المقترنة بالاموال ، بحيث تتحول الى مال واحد ويستخدم من أجل ذلك قانون ضرب طرفي المعادلة بقيمة عددية واحدة ، اوقانون قسمة طرفي المعادلة بقيمة عددية واحدة ، ثم يطبق بعدها طريقة الدستور ، ويذكر طريقته في رد الاموال الى مال واحد في عدة مواضع هامة من كتابه فهو يقول بالنسبة للمعادلة : أ س^{٢} = ب س : « وكذلك ما كثر من الامـــوال اوقـل يـرد الى مال واحد وكذلك يفعل بما عادلها من الاجذار يرد الى مثل ما يرد اليه المال » (٧٥)

ويصدق الشيء نفسه بالنسبة للمعادلة أ س٢ = ج : « وكذلك جميع الاموال زائدها وناقصها ترد الى مال واحد ، وان كانت اقل من مال زيد عليها حتى تكمل مالا تاما وكذلك يفعل بما عادلها من الاعداد » (٧٦)

ويطبق المبدأ نفسه بالنسبة للمعادلة أ س٢ + ب س = حـ « وكذلك لو ذكر ثلاثة اواقل اواكثر فارده الى مال واحد واردد ما كان معه من الاجذار والعدد الى مثل ما رددت اليه المال » (٧٧) . وكذلك قوله بالنسبة للمعادلة : أ س٢ + حـ = ب س : « وكل ماتاك من مالين اواكثر اواقل فارده الى مال واحد كنحو مابينت لك في الباب الاول » (٧٨) .

ويطبق المبدأ نفسه بالنسبة للمعادلة : ب س + حـ = س٢ « وكل ماكان اكثر من مال اوقل فارده الى مال واحد » (٧٩) . اما السبب المنطقي في اصراره على رد الاموال مازاد منها ومانقص الى مال واحد فيرجع في الحقيقة الى طريقة الحل التي توصل اليها الخوارزمي والتي تعتمد من حيث الاساس على تصورات هندسية وعلى خصائص بعض الاشكال من الهندسة المستوية ، وبخاصة المربع والمستطيل وسنجد بعد قليل مذهبه الهندسي في الحل ، ولكننا في الوقت نفسه لابد ان نميز بين التطبيقات الهندسية للجبر والاساس الهندسي لاشتقاق القانون الجبرى ، فبينما الاول مجرد تعبير هندسي عن معادلة جبرية معينة ، فان الثاني طريقة للوصول الى حل تشترك فيه معادلات ذات نمط معين وفي الحالتين نجد اسلوبا مبتكرا ورائدا في الربط بين الجبر والهندسة وهو الربط الضرورى لميلاد الهندسة التحليلية .

يقسم الخوارزمي الاشكال الستة الرئيسة من المعادلات الى مجموعتين : —

مجموعة تضم ثلاثة الاشكال الاولى لاتنصف فيها الاجذار

مجموعة اخرى تضم ثلاثة الاشكال الاخيرة وفيها تنصف الاجذار .

ويسوق الامثلة المتنوعة على الاشكال الستة وقصده من ذلك التوضيح وتقريب الحل الى الفهم وسهولة الاستعمال عند الحاجة ، وفي ذلك يذكر صراحة « ثم اتبعت ذلك من المسائل بما يقرب من الفهم وتخف فيه المؤونة وتسهل فيه الدلالة ان شاء الله تعالى » (٨٠) ولكنه بعد التوضيح بالامثلة يشير بوضوح الى السبب الذى ادى الى تنصيف الاجذار عند حل المعادلات من المجموعة الثانية فيقول : « فاما تحتاج فيه الى تنصيف الاجذار في الثلاثة الابواب الباقية فقد وصفته بابواب صحيحة وصيرت لكل باب منها صورة يستدل منها على العلة في التنصيف » (٨١) ، وفي هذا القول

مايشير الى اهتمام الخوارزمي بالاستدلال لمعرفة العلة وهو استدلال في الحدود الهندسية استخدمه في عدة مواضع من الكتاب ممايثبت ان الاساس الهندسي كان وراء حلوله الجبرية ، وان التماسه المستمر بالاسقاط الهندسي يدل على مدى تعلقه بالحل الهندسي لمشكلات جبرية ، فهو لم يكتف باستخدام الحل الهندسي للمجموعة الثانية من المعادلات التي تنصف فيها الاجذار ، بل برهن كذلك على الجمع والطرح لمقادير جبرية مثل :

$$(\sqrt{٢٠٠} - ١٠) + (٢٠ - \sqrt{٢٠٠}) \quad (٨٢)$$

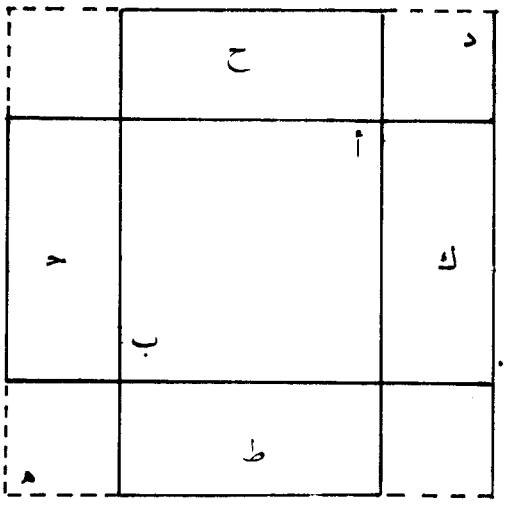
$$(\sqrt{٢٠٠} - ١٠) - (٢٠ - \sqrt{٢٠٠}) \quad (٨٣)$$

وطريقته العامة في الاسقاط الهندسي وايجاد الحل هي في التعبير عن المشكلة الجبرية هندسيا ، ثم التماس الطريق الابسط لبيان الحل وتعميمه ، بحيث يأخذ الحل في النهاية صورة حل جبرية .

ومن ابرز الامثلة على اعتماد الخوارزمي لهذه الطريقة في الاشتقاق وايجاد الحلول ، طريقته في اشتقاق قاعدة الدستور ، مع الاحتفاظ بالطريقة ذاتها في صياغة القاعدة بصورتها الجبرية والمثال الذى يسوقه هو المعادلة : —

س٢ + ١٠ س = ٣٩

وللتعبير عن المعادلة هندسيا يفترض الخوارزمي سطحـــا مربعا مجهول الاضـــلاع تكون مساحته س٢ ، ثم يلجأ الى التعبير عن ١٠ س هندسيا بتكوين اربعة مستطيلات على اضلاع المربع وعلى أساس ان طول الضلع الاخر من كل مستطيل يساوى $\frac{١٠}{٤} = ٢\frac{١}{٢}$ فتكون مساحة المستطيلات الاربعة ١٠ س وبناء على ذلك تكون المعادلة قد اخذت صورتها الهندسية على النحو الاتي : —



مساحة المربع أ ب + مجموع مساحة المستطيلات الاربعة : ك ، ح ، ج ، ط تعادل ٣٩ .

طريقة الحـــل (٨٤) : ـ

ان طول ضلع المربعات المقامة في الزوايا $\frac{١٠}{٤}$. وبتعبير جبرى $\frac{ب}{٤}$ فمساحة كل مربع صغير اذا = $(\frac{١٠}{٤})^{٢}$ او $(\frac{ب}{٤})^{٢}$. مجموع مساحات المربعات الصغيرة : ـ

$(\frac{١٠}{٤})^{٢} \times ٤ = \frac{١٠٠}{١٦} \times ٤ = (\frac{١٠}{٢})^{٢} = ٢٥$ وبتعبير جبرى :

$(\frac{ب}{٤})^{٢} \times ٤ = (\frac{ب}{٢})^{٢}$

مساحة المربع د هـ = مجموع مساحة المربعات الصغيرة + مساحة المربع الوسطي أ ب + مجموع مساحة المستطيلات الاربعة .

لما كان ضلع المربع المجهول س ، فان ضلع المربع الكبير د هـ = س + $\frac{١٠}{٢}$

$(س + \frac{١٠}{٢})^{٢} = (\frac{١٠}{٢})^{٢} + ٣٩$

$س + \frac{١٠}{٢} = \sqrt{(\frac{١٠}{٢})^{٢} + ٣٩}$

$س = \sqrt{(\frac{١٠}{٢})^{٢} + ٣٩} - \frac{١٠}{٢}$

$س = \sqrt{٢٥ + ٣٩} - ٥$

$س = ٨ - ٥$

$س = ٣$

وبالطريقة الجبرية : ـ

$(س + \frac{ب}{٢})^{٢} = (\frac{ب}{٢})^{٢} + ح$

$س + \frac{ب}{٢} = \sqrt{(\frac{ب}{٢})^{٢} + ح}$

$س = \sqrt{(\frac{ب}{٢})^{٢} + ح} - \frac{ب}{٢}$

وبطريقة هندسية مبتكرة يحصل الخوارزمي كذلك على علة تنصيف الاجذار والحل للمعادلات الاخرى بالدستور : ـ

أ س ٢ + حـ = ب س ودستور حلها :

$$\text{س} = \frac{\text{ب}}{٢} \pm \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢} - \text{حـ}}$$

ب س + حـ = أ س ٢ ودستور حلها :

$$\text{س} = \sqrt{\left(\frac{\text{ب}}{٢}\right)^{٢} + \text{حـ}} + \frac{\text{ب}}{٢}$$

ان الملاحظة الرياضية التي يقع عليها الباحث في الجبر والمقابلة هي تفادى الخوارزمي للقيمة السالبة وعدم ذكره لها ، ففي المثال السادس للمعادلة س٢ = ١٢س + ٢٨٨ يذكر القيمة الموجبه ا س وهي ٢٤ ، بينما يهمل ذكر القيمة الاخرى وهي سالبة ا س = ـ ١٢ ، ولكن ذلك لايعني مطلقا انه لم يعرف القيمة السالبة ا س ، فهو يذكر الزيادة والنقصان في التثبت من صحة الحل للمعادلة ولايفوته ان يذكر قيمتين لحل المعادلة في حالة كونهما موجبتين مثال ذلك ماحدث بالنسبة للمعادلة س ٢ + ٢١ = ١٠ س حيث يقول « ان تنصف الاجذار فتكون خمسة فاضربها في مثلها تكون خمسة وعشرين فانقص منها الواحد والعشرين والتي ذكر انها مع المال فيبقى اربعة فخذ جذرها وهواثنان فانقصه من نصف الاجذار وهو خمسة فيبقى ثلاثة وهو جذر المال الذى تريده والمال تسعة ، وان شئت فزد الجذر على نصف الاجذار فتكون سبعة وهو جذر المال الذى تريده والمال تسعة واربعون » (٨٥) .

يظهر من النص بوضوح ان للمعادلة السابق ذكرها قيمتان موجبتان هما ثلاثة وسبعة .

ولقد ادرك الخوارزمي مسألة التثبت من الحل بعد الحصول على النتيجة او اكتشاف قيمة المجهول ، وهذه الطريقة اصبحت معروفة في المنطق الذى يعرف بمنطق الحل اوالمنطقى الهورسيتكي Heuristic Logic ونص الخوارزمي يشير الى مسألة التثبت بوضوح ، حيث يقول « فاذا وردت عليك مسئلة تخرجك الى هذا الباب فامتحن صوابها بالزيادة فان لم تكن فهي بالنقصان لامحالة ، وهذا الباب يعمل بالزيادة والنقصان جميعا . . . . . (٨٦)

واخيرا . . لابد ان نذكر موقفه من المقادير التخيلية التي قد تظهر عند حل المعادلات ، اذ يرى ان المسئلة تكون مستحيلة اذا ماظهرت نتيجة الحل مقدارا تخيليا

مثل $\sqrt{-٣}$. فيقول « واعلم انك اذا نصفت الاجذار في هذا الباب وضربتها في مثلها فكان مبلغ ذلك اقل من الدراهم التي مع المال فالمسئلة مستحيلة » (٨٧) ويمكن التعبير عن هذا النص جبريا بالشكل الاتي : —

$$س = \frac{ب}{٢} \mp \sqrt{\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢} - حـ}$$

اذا كانت القيمة العددية لـ $\left(\frac{ب}{٢}\right)^{٢}$ اقل من حـ فان النتيجة تكون كما يأتي : —

$$س = \frac{ب}{٢} \mp \sqrt{-م}$$

وفي ذلك يعتبر الخوارزمي المسئلة مستحيلة ، وقد اشار المحققان لكتاب الجبر والمقابلة الى ذلك بالقول « تنبه الخوارزمي للحالة التي يستحيل فيها ايجاد قيمة حقيقية للمجهول فقال ان المسئلة تكون في هذه الحالة (مستحيلة) وقد بقى هذا اسمها بين علماء الرياضيات الى اواخر القرن الثامن عشر عندما بدأ البحث في الكميات التخيلية على ايدى كاسبا فسل وجان روبير ارجان » (٨٨)

١ . يستخدم رسل ووايتهيد في كتابهما اصول الرياضيات Principia Mathematica مفهوم (دالة القضية) على اساس انها صيغة فيها متغير واحد على الاقل ، تتحول الى قضية تحتمل الصدق اوالكذب بعد اعطاء قيم لمتغيراتها .

٢ . وردت هذه الملاحظات مكتوبة كذلك في محاضراته :

Hans. Hermes., Einführung in die mathematische Logik P. 77 (Münster/Westf. 1957).

٣ . ابن النديم : الفهرست ص ٣٩٧

(مطبعة الاستقامة بالقاهرة)

٤ . القفطي ، جمال الدين ، كتاب اخبار العلماء باخبار الحكماء ص ١٨٧ — ١٨٨

(مطبعة السعادة بجوار محافظة مصر)

٥ . القفطي : المصدر السابق ص ١٧٥

٦ . ابن ابي اصيبعة : عيون الانباء في طبقات الاطباء ص ٢٨٣

(شرح وتحقيق نزار رضا - دار مكتبة الحياة — بيروت)

٧ . القفطي : المصدر السابق ص ١٨٧

٨ . القفطي : المصدر السابق ص ١٧٧ — ١٧٨

9. Bell, E.T., The Development of Mathematics P. 99 (Second Edition: New York. London. 1945),.

١٠ . الدوميلي : العلم عند العرب ص ١٦٠

(ترجمة د . عبدالحليم النجار ود . محمد يوسف موسى ، دار القلم ١٩٦٢)

11. Lukasiewicz, J., Aristotle's Syllogistic (Second Edition. Oxford. 1957).

١٢ . للمنطق صلة وثيقة باللغة والرياضيات ، لان التفكير المنطقي يفترض لغة للتعبير ، وقد تكون لغة الحياة اليومية اولغة رياضية ، وعلى الرغم من قلة المعلومات المتوفرة عن العلوم في وادى الرافدين ووادى النيل قبل بزوغ

الحضارة اليونانية الا ان ماتركوه يبرهن على استخدام مهم لقوانين منطقية في الهندسة والجبر والفلك ، وفي حدود اليونان ظهر قبل ارسطو عدد من الفلاسفة الذين صاغوا قوانين منطقية امثال زينون الايلي وبارمنيدس وسقراط وافلاطون .

١٣ . لقد عرف المصريون القدماء كثيرا من الحقائق الهندسية وعرف البابليون كذلك حقائق هندسية كان من ابرزها القضية المعروفة بنظرية فيثاغورس للمثلث القائم الزاوية . ونقلت المعرفة الهندسية من مصر وبابل الى اليونان ، وهو انتقال من استخدام الهندسة في الحياة الى التأمل فيها والنظر في قضاياها .

١٤ . يحتوى الاورغانون على كتاب المقولات Categoriae وكتاب العبارة De Interpretatione والتحليلات الاولى Analytica Priora والتحليلات الثانية Analytica Posteriora والمواضيع Topica وغير ذلك ، فتناول في المقولات موضوع الالفاظ ، بينما اهتم في العبارة بالقضايا ، واقام نظريته القياسية في التحليلات الاولى وثبت قواعد عامة للعلم البرهاني وشروطه وعناصره في التحليلات الثانية ، وناقش نظرية التعريف في كتاب المواضيع (انظر كتابي : نظرية ارسطو المنطقية . بغداد ١٩٦٤) .

١٥ . تناول جورج بول موضوع منطق ارسطو من زاوية الجبر المنطقي في كتابه : بحث في قوانين الفكر .

Boole, G., The Laws of Thought : An Investigation of (Dover Publications, Inc. New York)

وتناوله جوتلوب فريجه من زاوية حساب دالات القضايا في كتابه اللغة الرمزية

Frege, G., Begriffsschrift (Halle. 1979)

كما تناوله حديثا عدد من المناطقة منهم دافيد هلبرت واكرمان في كتابهما « الخصائص الاساسية للمنطق النظرى »

Hilbert, D. ,& Ackermann, W. Grundzuge der Theoretischen Logik P. 44-48 (Dritte Auflage. Springer. 1949)

١٦ . اصبح للطريقة الاستدلالية منذ كتاب اقليدس تأثيرا كبيرا على العلوم

والفلسفة . فكتاب غاليلو «العلمان الجديدان» وكتاب نيوتن «المبادئ الرياضية للفلسفة الطبيعية» وكتاب الاخلاق لسبينوزا تشير كلها الى اهمية الطريقة في بناء المعرفة العلمية والفلسفية . ولاتزال الدراسات الفيزياوية النظرية وعلوم اخرى والرياضيات تأخذ بالطريقة البديهية (انظر بحثي «الطريقة البديهية في المنطق والرياضيات والفيزياء النظرية» — مجلة كلية الاداب — ١٩٧٧) .

١٧ . تعتبر مشكلة مصادرة التوازى جوهر البحث الذى ادى الى ظهور الهندسات غير الاقليدية . حيث كانت جهود علماء الرياضيات متجهة الى البرهان عليها بافتراض نقيضها لعل المرء يحصل عندئذ على تناقض في الهندسة ، ولكن ظهر ان الهندسات التي لاتأخذ بها وتستبدلها ببديهية تفترض عدد لامتناه من المتوازيات اوببديهية لاتفترض متواز هي هندسات متينة خالية من التناقض

١٨ . الخيام ، عمر : مصادرات اقليدس ص ٦ تحقيق د . عبد الحميد صبره (المعارف بالاسكندرية ١٩٦١)

١٩ . الطوسي ، نصير الدين : الرسالة الشافية عن الشك في الخطوط المتوازية ص ٤ (الدكن . حيدر آباد)

٢٠ . حقق هلبرت ذلك في كتابه «اسس علم الهندسة» سنة ١٨٨٩
Hilbert, D., Grund lagen der Geometrie. 1889.

٢١ . انظر لمعرفة جملة افكار فيثاغورس الرياضية في كتاب بيل «رجال الرياضيات»
Bell, E.T., Men of Mathematics Vol. I.P. 20 (A Pelican book 1953).

٢٢ . من أجل معرفة الجبر البابلي والعلوم القديمة انظر كتاب نيوجيبور (العلوم المضبوطة في الماضي القديم)
Neugebauer, O., The Exact Sciences in Antiquity. (Princeton, 1951-1952, Brown, 1957, Torchbook 1962).

٢٣ . " لقد اسس الاسكندر الاكبر مدينة الاسكندرية سنة ٣٢٣ ق . م. في الموقع الذى كانت تشغله من قبل القرية المصرية راقودة وقد ظل هذا الاسم علما على الاسكندرية في اللغة المصرية القبطية الدارجة ، وعندما انقسمت امبراطورية الاسكنـــدر بيـن قواده كانت مصر من نصيب بطليمـــوس سوتير

(Ptolemy Soter) في ايدى اسرة البطالمة الى ان انتقلت الى الرومان واتخذ بطليموس سوتير الاسكندرية قاعدة لملكه وبذل مجهودات طائلة ليجعل منها موئلا للثقافة والعلوم اليونانية ، وأنشأ فيها الاكاديمية التي اصبحت ولما يمضى على انشائها وقت طويل بمثابة جامعة يونانية تبارى المدارس الاثينية القديمة" د . لاسي اوليرى : علوم العرب وسبل انتقالها الى العر ب ص ٢٣ ترجمة د . وهيب كامل (الالف كتاب ، عدد ٣٩٥ ، ١٩٦٢)

٢٤ . تذكر كتب التراجم والسير فضل ديوفنطس في صناعة الجبر وقد ذكره ابن النديم في الفهرست (ص ٣٩٠) بقوله : اليوناني الاسكندراني وله من الكتب : كتاب في صناعة الجبر ، ويذكره القفطي في كتاب اخبار العلماء باخبار الحكماء (ص ١٢٦) بقوله اليوناني الاسكندراني فاضل كامل مشهور في وقته وتصنيفه وهو صناعة الجبر كتاب مشهور مذكور خرج الى العربية وعليه عمل اهل هذه الصناعة واذا تبحره الناظر رأى بحرا في هذا النوع ، ويذكره ابن ابي اصيبعة في كتابه الاطباء (ص ٣٣٠) في ذكره لمولفات قسطا بن لوقا البعلبكي فيقول ان له (كتاب في ترجمة ديوفنطس في الجبر والمقابلة) .

٢٥ . قام رشدى راشد بتحقيق كتاب ديوفنطس الذى ترجمه قسطا بن‌لوقا. صناعة الجبر لديوفنطس — التراث العلمي العربي (١) — ١٩٧٥.

٢٦ . كتاب الجبر والمقابلة لمحمد بن موسى الخوارزمي (دار الكاتب العربي — مصر ١٩٦٨) وتفضل مشكورا كل من الدكتور علي مصطفى مشرفه والدكتور محمد مرسي احمد فوضع مقدمة مع تعليقات رياضية هامة في حاشية صفحات الكتاب يسرت على القارئ حل كثير من المعضلات التي تثيرها صياغة المفاهيم والمعادلات والحلول لغويا ، وذلك عن طريق استخدام لغة الجبر الحديث .

٢٧ . امتاز الفكر اليوناني بالاستدلالية الصورية وركز افلاطون وارسطو اهتمامهم حول تثبيت الطريقة الاستدلالية في بناء العلم ولم تحض الطريقة الاستقرائية التجريبية باهتمامهم ونجح المفكر اليوناني في اثبات‌جدوى الطريقة الاستدلالية ولكنه لم يفلح في الحساب لعدم تطور هذا العلم بما فيه الكفاية .

٢٨ . على الرغم من انتقال العلم اليوناني والمصرى الى دائرة معارف مدرسة الاسكندرية الا ان اهتمام البحث تركز من جديد حول الطريقة الاستدلالية في العلم الرياضي مع اهتمام بعض العلماء بالتجارب والاجهزة على نطاق ضيق .

٢٩ . منطق ارسطو (التحليلات الثانية) ص ٣١٨

An. Post. A 2, 72 b
(تحقيق الدكتور عبدالرحمن بدوى)

30. Bochenski, I.M., Formale Logik P. 53 (Freiburg München 1956),.

٣١ . خليل ، ياسين : نظرية ارسطو المنطقية ص ١٢٤

٣٢ . الخوارزمي المصدر السابق ص ١٦

٣٣ . المصدر نفسه ص ٢٧

٣٤ . المصدر نفسه ص ٣٠

٣٥ . المصدر نفسه ص ٣١

٣٦ . المصدر نفسه ص ١٦ — ١٧

٣٧ . المصدر نفسه ص ٢٧

٣٨ . المصدر نفسه ص ٣٤

39. Nesselmann, G.H.L., Algebra der Griechen (Berlin 1842).

٤٠ . الدوميلي المصدر السابق ص ١٥٦

٤١ . الكاتب الخوارزمي ابي عبدالله محمد بن احمد بن يوسف : مفاتيح العلوم ص ١١٦ (أدارة الطباعة المنيرية بمصر ١٣٤٢ هـ)

٤٢ . يرى الدكتور عبدالحليم منتصر ان العرب استعملوا الرموز في الاعمال الرياضية فالمعادلة ٥ س ٢ = ١٢ س + ٥٤ كانت تكتب ٥ص ل ١٢ شـ و ٥٤ ، ص تشير الى المال ول تشير الى يعدل ، شـ تشير الى شيء ، والعطف (و) يشير الى الزيادة .

اثر العرب والاسلام في النهضة الاوربية ص ٢٢٠ (شارك في كتابة فصوله

عدد من الباحثين : الهيئة المصرية العامة ١٩٧٠

ويرى الاوربيون ان الفضل يعود الى عالم الرياضيات الفرنسي Fransois Viete (١٥٤٠ — ١٦٠٣) في استعمال الرموز العامة للدلالة على الاعداد فهو بذلك مؤسس التدوين الرمزى الحديث في الجبر .

٤٣ . الخوارزمي : المصدر السابق ص ١٦

٤٤ . الكاتب الخوارزمي : المصدر السابق ص ١١٥

٤٥ . الخوارزمي : المصدر السابق ص ١٦

46. Hunke, S., Allahs Sonne über dem AbendLand P. 47.

٤٧ . يقصد بالالغوريثم في الرياضة الحديثة مجموعة العمليات الخاضعة لاجراء منتظم لحل مشكلات ذات نمط معين . . وانطبق الاسم في العصور الوسطى على الحساب الذى يستخدم الارقام الهندية — العربية .

Encyclopedia Britanica P. 629 A. Antarah.

٤٨ . ابن النديم : المصدر السابق ص ٧٠

٤٩ . نصار ، حسين : المعجم العربي : نشأته وتطوره ص ٢٢١

50. Bochenski, I. M. Op. cit. P. 318.

51. Ibid., P. 318-320

52. Encyclopedia Britanica P. 612 (A. Antarah I) .

٥٣ . الخوارزمي المصدر السابق ص ١٦

٥٤ . المصدر نفسه ص ١٦ — ١٧

٥٥ . المصدر نفسه ص ١٧

٥٦ . المصدر نفسه ص ١٧

٥٧ . المصدر نفسه ص ١٨

٥٨ . المصدر نفسه ص ٢٧

٥٩ . المصدر نفسه ص ٢٧

٦٠ . المصدر نفسه ص ٢٧

٦١ . المصدر نفسه ص ٢٧

٦٢ . المصدر نفسه ص ٢٨

٦٣ . استخدم الخوارزمي هذه القاعدة وان لم ينص عليها صراحة

٦٤ . المصدر نفسه ص ٣٢

٦٥ . المصدر نفسه ص ٣٠ — ٣١

٦٦ . المصدر نفسه ص ٣١ — ٣٢

٦٧ . المصدر نفسه ٤١

٦٨ . المصدر نفسه ص ٢٧

٦٩ . المصدر نفسه ص ٣٤ — ٣٥

٧٠ . المصدر نفسه ص ٣٥ — ٣٦

٧١ . المصدر نفسه ص ٣٦

٧٢ . المصدر نفسه ص ٣٦ — ٣٧

٧٣ . المصدر نفسه ص ٣٧ — ٣٨

٧٤ . المصدر نفسه ص ٣٨

٧٥ . المصدر نفسه ص ١٧

٧٦ . المصدر نفسه ص ١٨

٧٧ . المصدر نفسه ص ١٩

٧٨ . المصدر نفسه ص ٢١

٧٩ . المصدر نفسه ص ٢١

٨٠ . المصدر نفسه ص ٣٤

٨١ . المصدر نفسه ص ٢١

٨٢ . استخدمت الطريقة الهندسية في حل المعادلة :

أ س ٢ + حـ = ب س . ص ٢٣ — ٢٤

والمعادلة ب س + حـ = أ س٢ : ص ٢٥—٢٦

واستخدمت كذلك بالنسبة للمعادلة

($\sqrt{٢٠٠}$ — ١٠) + (٢٠ — $\sqrt{٢٠٠}$) ص ٣٢

٨٣ . المصدر نفسه ص ٣٣

٨٤ . انظر بحث الاستاذ خالد السامرائي (الرياضيات عند العرب) ص ٣٠ — ٣١ (مجلة معهد المدرسين العالي ١٩٦٤)

٨٥ . الخوارزمي : المصدر السابق ص ٢٠

٨٦ . المصدر نفسه ص ٢٠

٨٧ . المصدر نفسه ص ٢٠ — ٢١

٨٧ . المصدر نفسه ص ٢٠ — ٢١

٨٨ . المصدر نفسه ص ٢١